



数据结构

(C语言版) (第2版)

图

图的应用 (2)

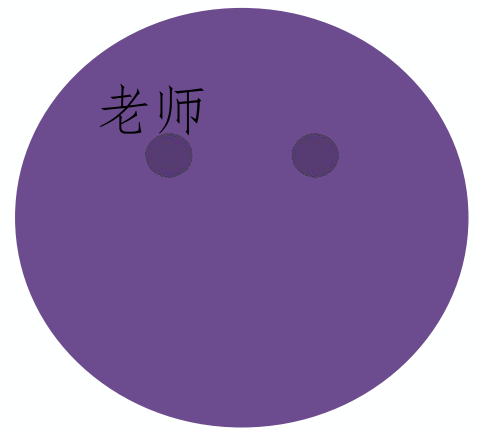
主讲教师：汪红松

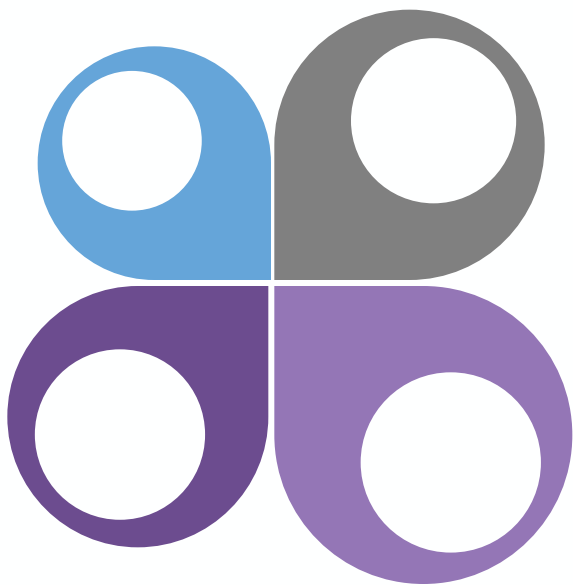


教学内容 Contents

- 1 图的定义和基本术语
- 2 图的存储结构
- 3 图的遍历
- 4 图的应用(1)
- 5 图的应用(2)

- 一、拓扑排序
- 二、关键路径





最小生成树



最短路径



拓扑排序



关键路径

一、拓扑排序

1.有向无环图及其应用

用有向图来描述一个工程或系统的进行过程。

一个工程可以分为若干个子工程，只要完成了这些子工程（活动），就可以导致整个工程的完成。

① **AOV网**(Activity On Vertices)—用**顶点**表示活动的网络

② **AOE网**(Activity On Edges)—用**边**表示活动的网络

比如教学计划的制定

哪些课程是必须先修的，哪些课程是可以并行学习的。

▶▶▶ 一、拓扑排序

2.教学计划的制定

课程代号	课程名称	先修课程
C ₁	高等数学	
C ₂	程序设计基础	
C ₃	离散数学	C ₁ , C ₂
C ₃	数据结构	C ₃ , C ₂
C ₅	高级语言程序设计	C ₂
C ₆	编译方法	C ₅ , C ₄
C ₇	操作系统	C ₄ , C ₉
C ₈	普通物理	C ₁
C ₉	计算机原理	C ₈

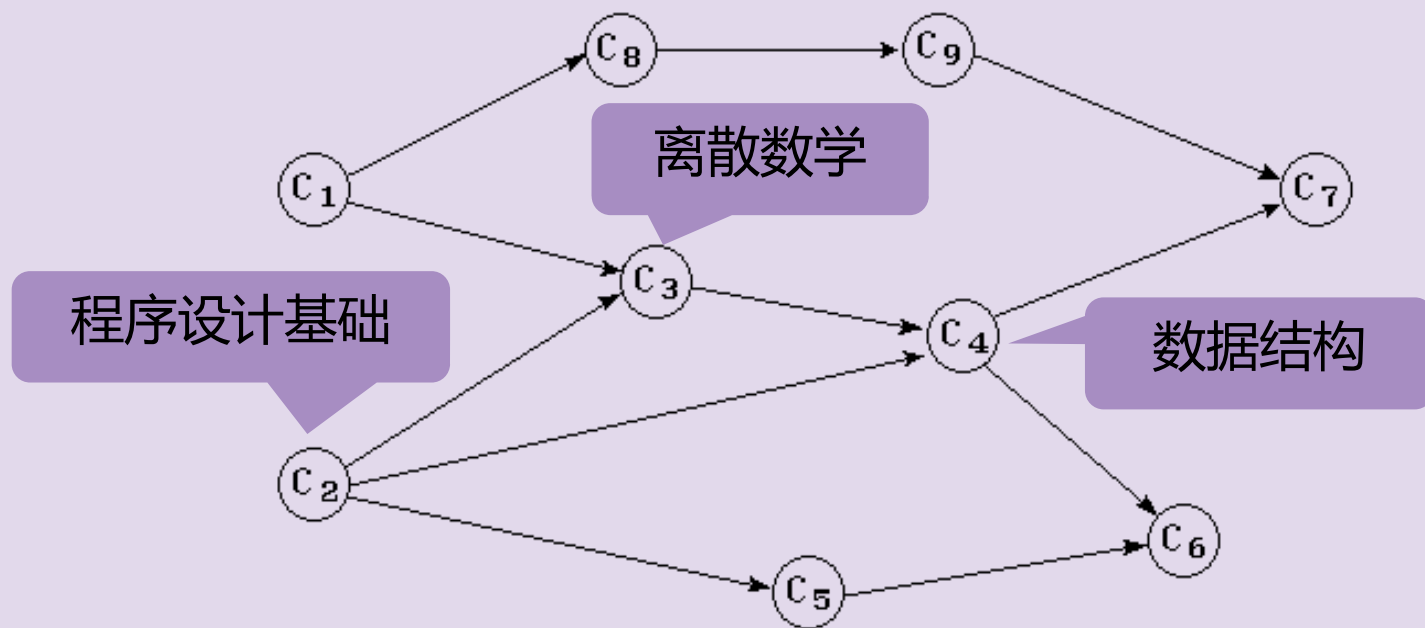
▶▶▶ 一、拓扑排序

2. 教学计划的制定

对学生选课工程图进行拓扑排序，得到的拓扑有序序列为

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_8, C_9, C_7$

或 $C_1, C_8, C_9, C_2, C_5, C_3, C_4, C_7, C_6$



学生课程学习工程图

▶▶▶ 一、拓扑排序

将AOV-网中所有顶点排成一个线性序列，该序列满足：
若在AOV-网中由顶点 v_i 到顶点 v_j 有一条路径，则在该线性序列中的顶点 v_i 必定在顶点 v_j 之前。

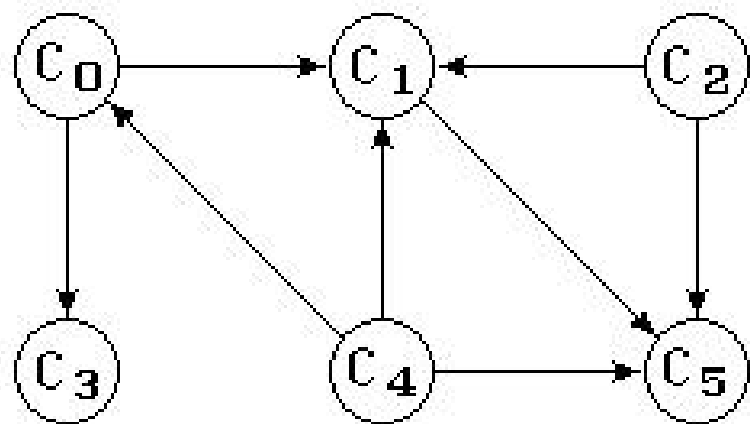
- ✓ 用在AOV-网中，不应该出现有向环。因为某项活动不可能以自己为先决条件。
- ✓ 对给定的AOV-网判定其中是否存在环的检测办法是对有向图的顶点进行拓扑排序。

▶▶▶ 一、拓扑排序

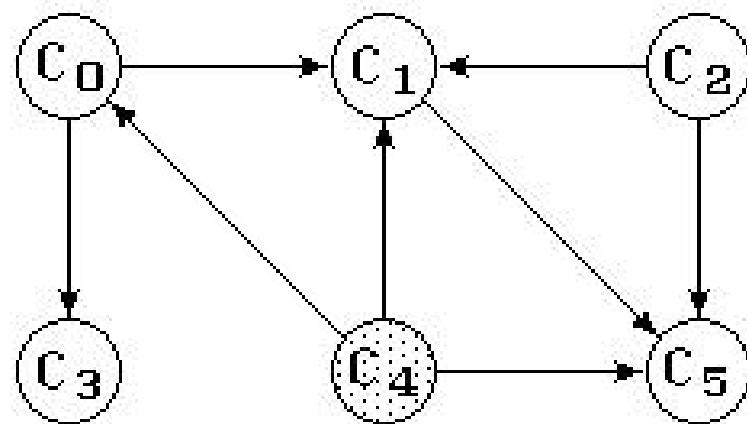
3. 拓扑排序算法的思想 - 重复选择没有直接前驱的顶点

- (1) 输入AOV网络。令 n 为顶点个数；
- (2) 在AOV网络中选一个没有直接前驱的顶点, 并输出之;
- (3) 从图中删去该顶点, 同时删去所有它发出的有向边;
- (4) 重复以上 2、3 步, 直到：

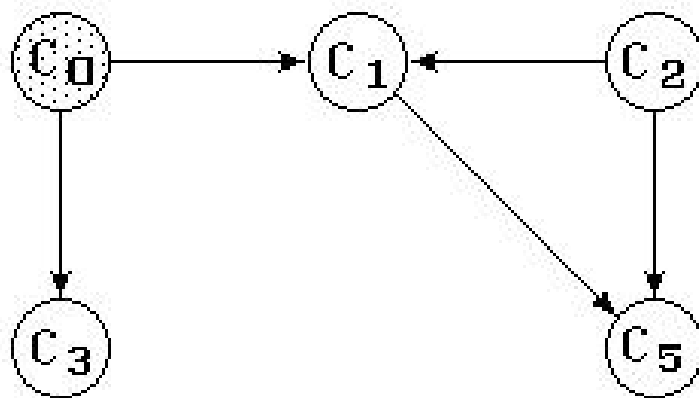
- ✓ 全部顶点均已输出，拓扑有序序列形成，拓扑排序完成；
- ✓ 图中还有未输出的顶点，但已跳出处理循环。这说明图中还剩下一些顶点，它们都有直接前驱，再也找不到没有前驱的顶点了。这时AOV网络中必定存在有向环。



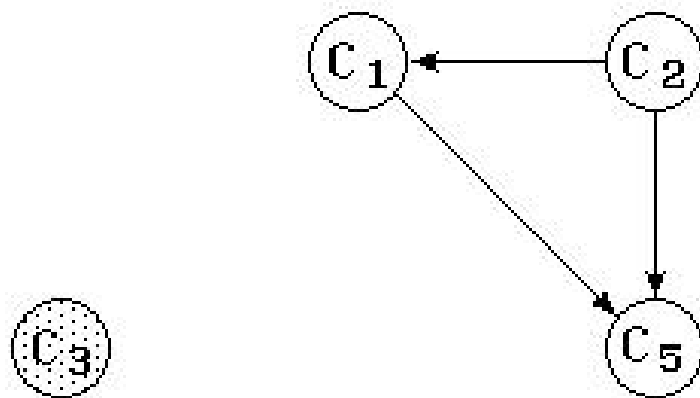
(a) 有向无环图



(b) 输出顶点 C_4

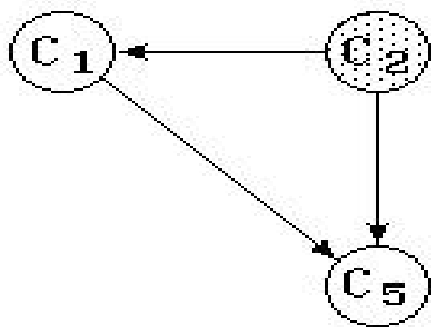
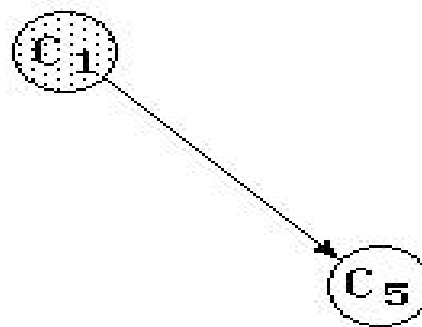


(c) 输出顶点 C_0



(d) 输出顶点 C_3

一、拓扑排序

(e) 输出顶点 C_2 (f) 输出顶点 C_1 (g) 输出顶点 C_5

(h) 拓扑排序完成

→拓扑序列 $C_4, C_0, C_3, C_2, C_1, C_5$ 。满足图中给出的所有前驱和后继关系，对于本来没有这种关系的顶点，如 C_4 和 C_2 ，也排出了先后次序关系。

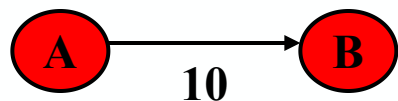
二、关键路径

1. 用途：估算工程项目完成时间

AOE网络：定义结点为事件，有向边的指向表示事件的执行次序。单位是时间（时刻）。有向边定义为活动，它的权值定义为活动进行所需要的时间。

2. 术语

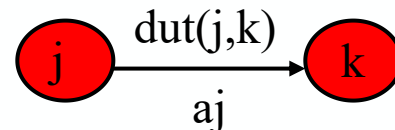
- 源点：表示整个工程的开始点，也称起点。
- 收点：表示整个工程的结束点，也称汇点。
- 事件结点：单位时间，表示的是时刻。
- 活动（有向边）：它的权值定义为活动进行所需要的时间。方向表示起始结点事件先发生，而终止结点事件才能发生。
- 事件的最早发生时间（ $Ve(j)$ ）：从起点到本结点的最长的路径。意味着事件最早能够发生的时刻。
- 事件的最迟发生时间（ $Vl(j)$ ）：不影响工程的如期完工，本结点事件必须发生的时刻。



二、关键路径

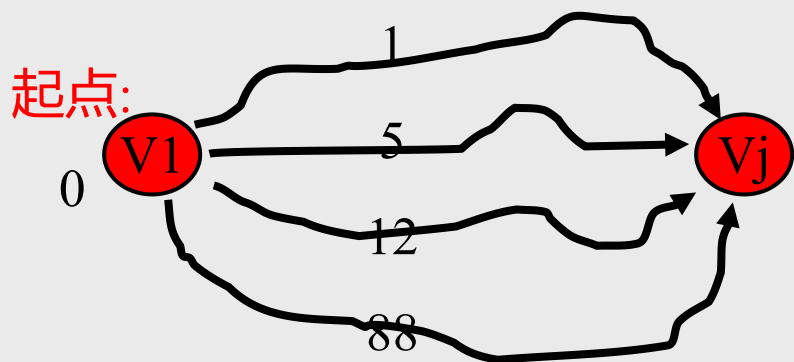
活动的最早开始时间： $e(a_i) = Ve(j)$

活动的最迟开始时间： $l(a_i) = Vl(k) - \text{dut}(i, k)$

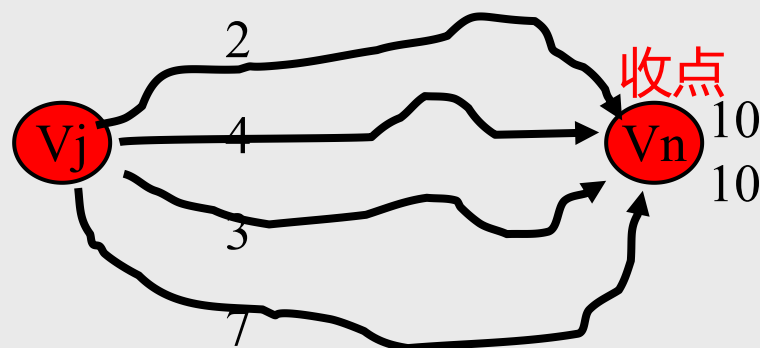


关键活动：最早开始时间 = 最迟开始时间的活动

关键路径：从源点到收点的最长的一条路径，或者全部由关键活动构成的路径。



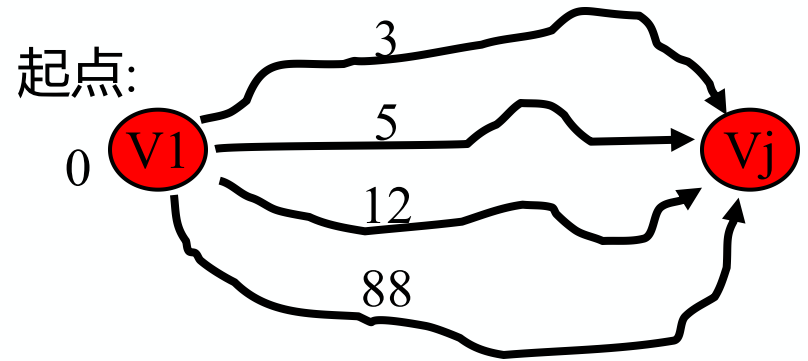
$Ve(V_j) = 88$ 取 1、5、12、88 的最大值 88



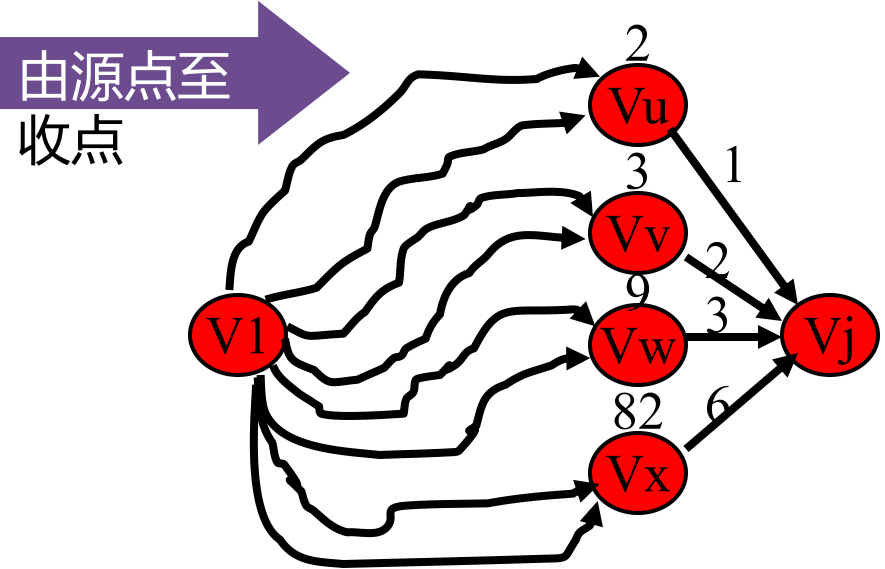
$Vl(V_j) =$ 取 $10-2$ 、 $10-4$ 、 $10-3$ 、 $10-7$ 的最小值 3; 或 10 - 最长路径 7

二、关键路径

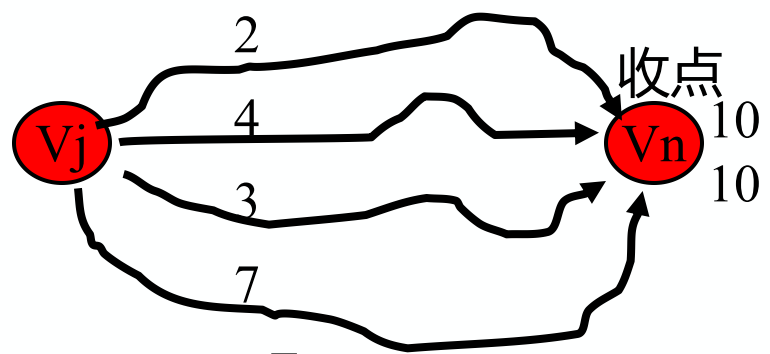
$Ve(j)$ 及 $VL(j)$ 的求法



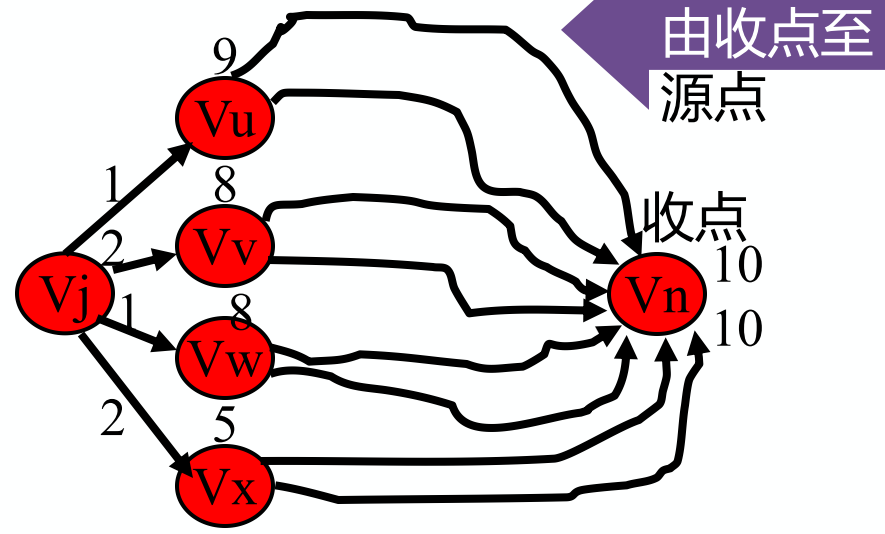
$Ve(V_j) = 3, 5, 12, 88$ 的最大值 88



$Ve(V_j) = V_j$ 的起始结点的最早发生时间 + 各自的边的权值中的和的最大值 88



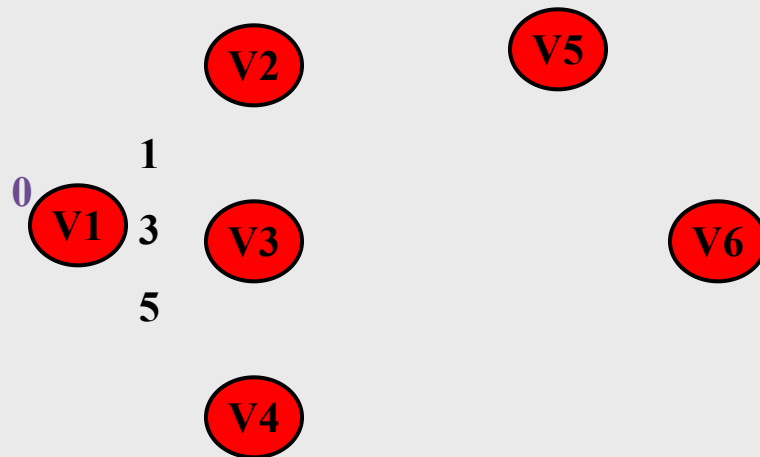
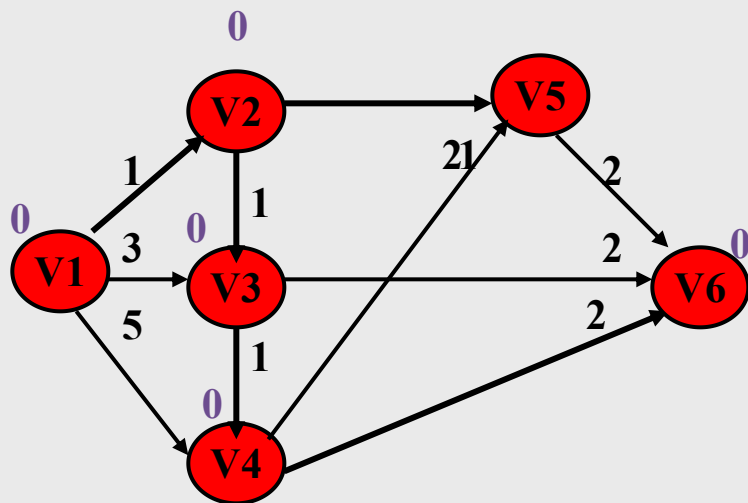
$VL(V_j) = \text{取 } 10-2, 10-4, 10-3, 10-7 \text{ 的最小值 } 3$



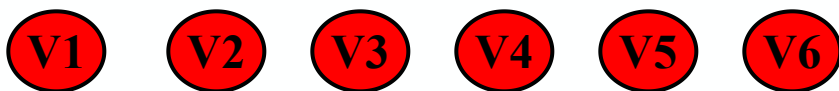
$VL(V_j) = \text{取终止结点的最迟发生时间} - \text{各自的边的权值的差的最小值 } 3$

二、关键路径

实例：求事件结点的最早发生时间

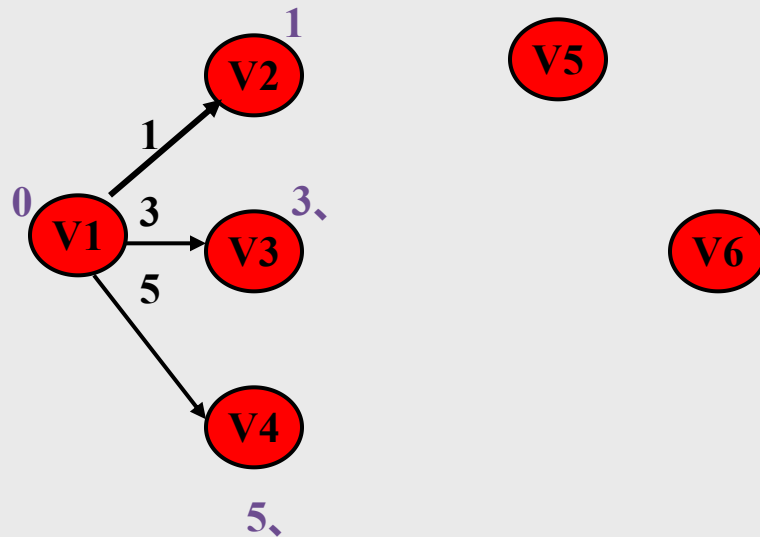
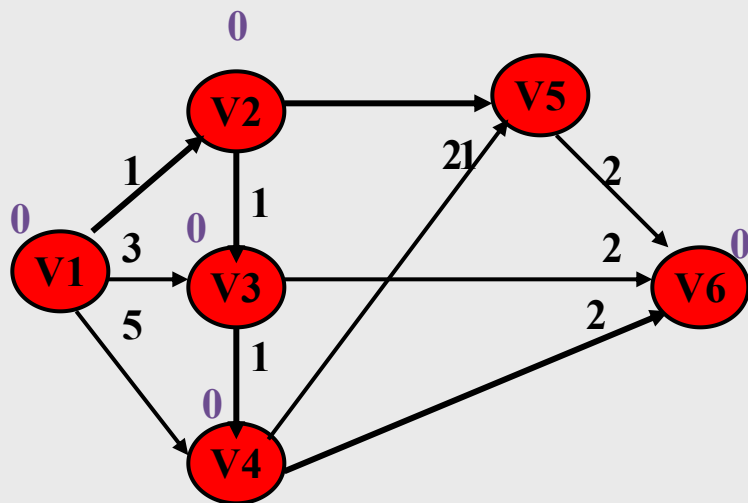


正向拓扑排序：

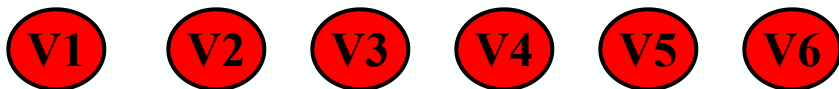


二、关键路径

实例：求事件结点的最早发生时间

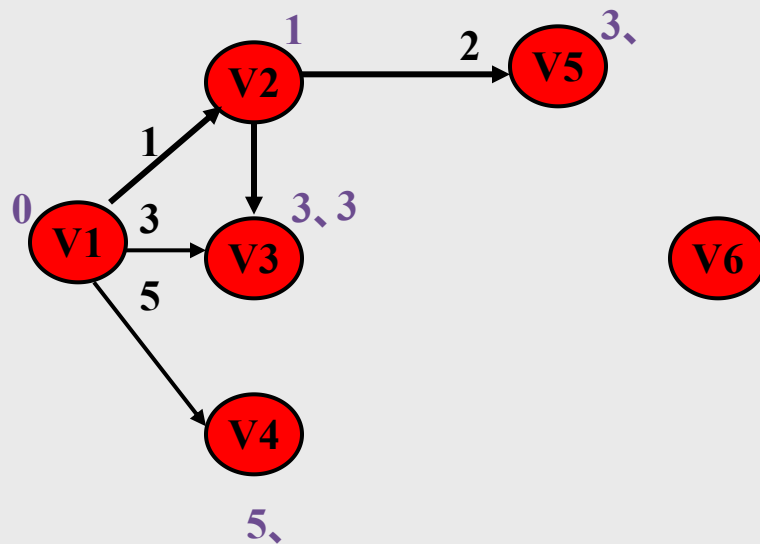
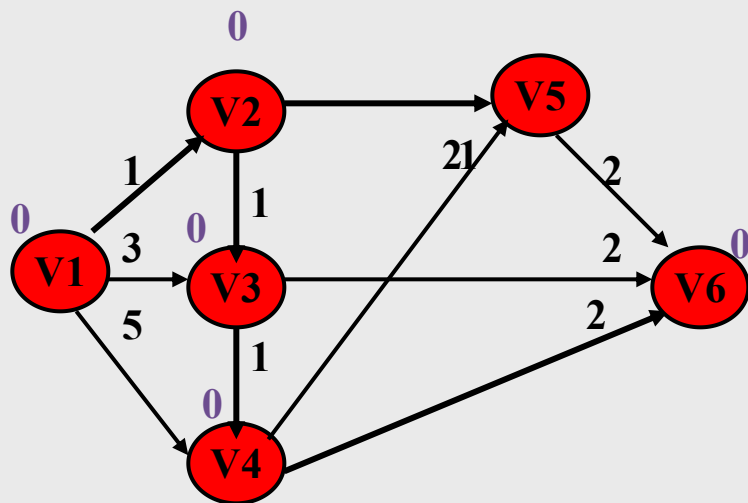


正向拓扑排序：

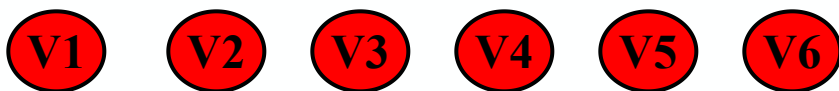


二、关键路径

实例：求事件结点的最早发生时间

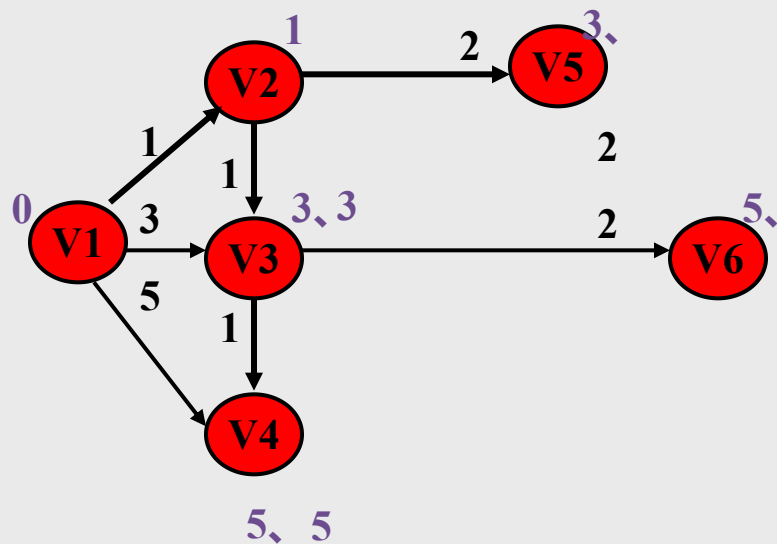
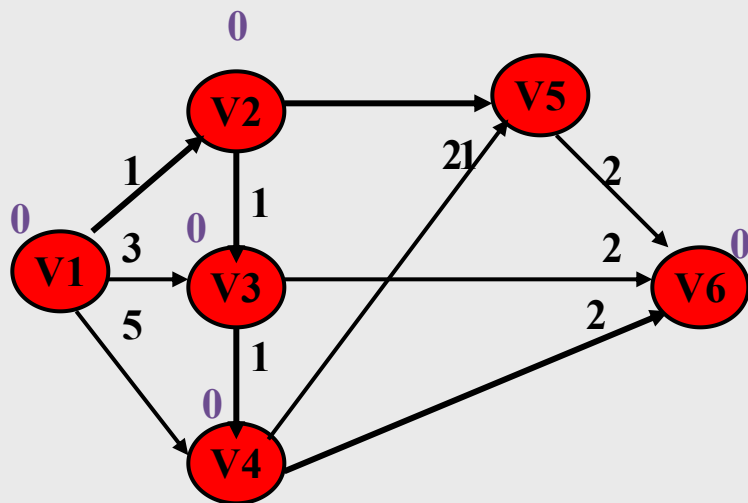


正向拓扑排序：

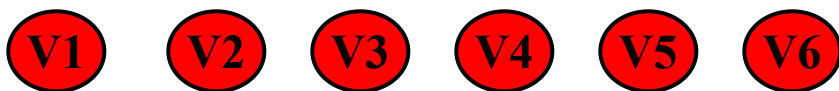


二、关键路径

实例：求事件结点的最早发生时间

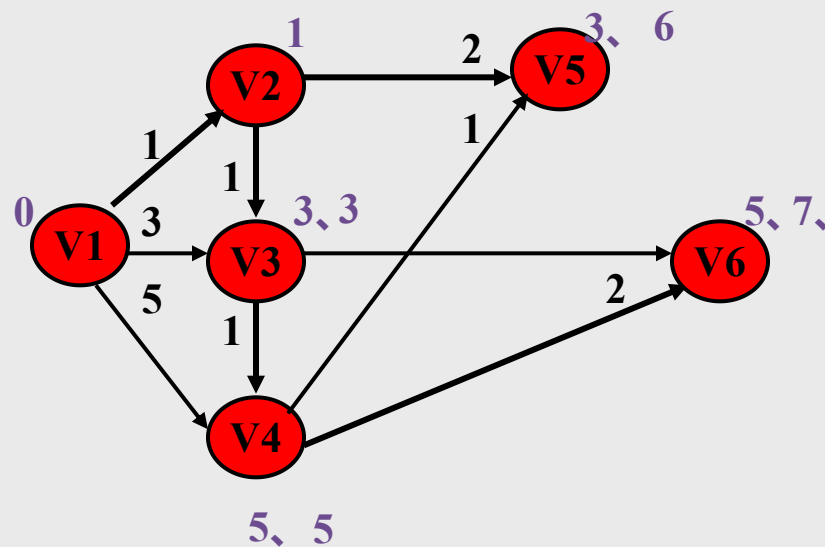
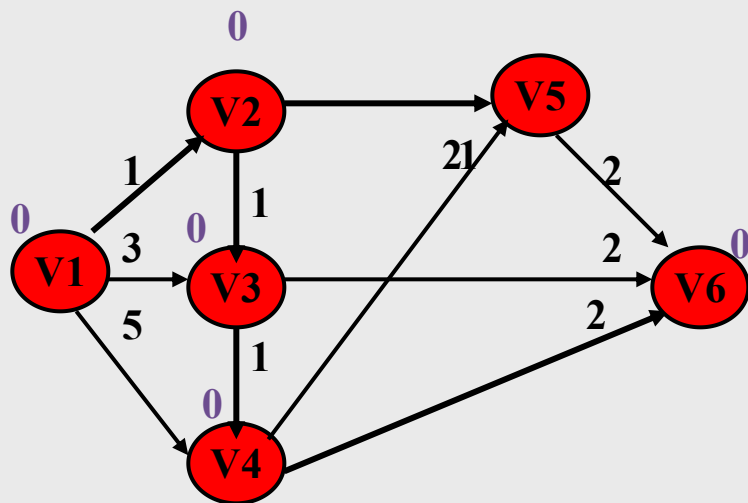


正向拓扑排序：

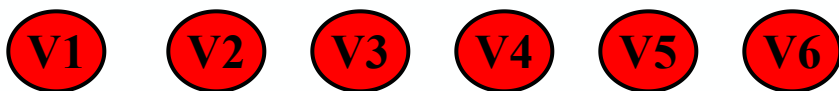


二、关键路径

实例：求事件结点的最早发生时间

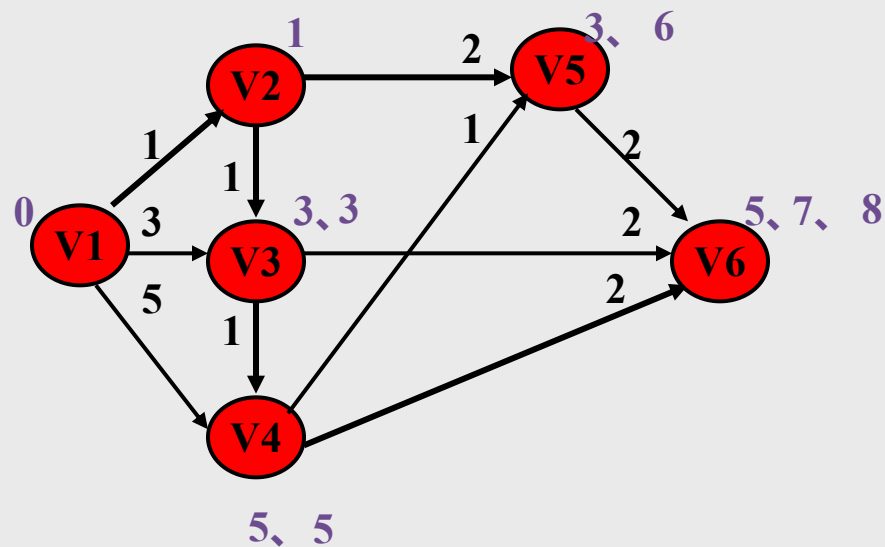
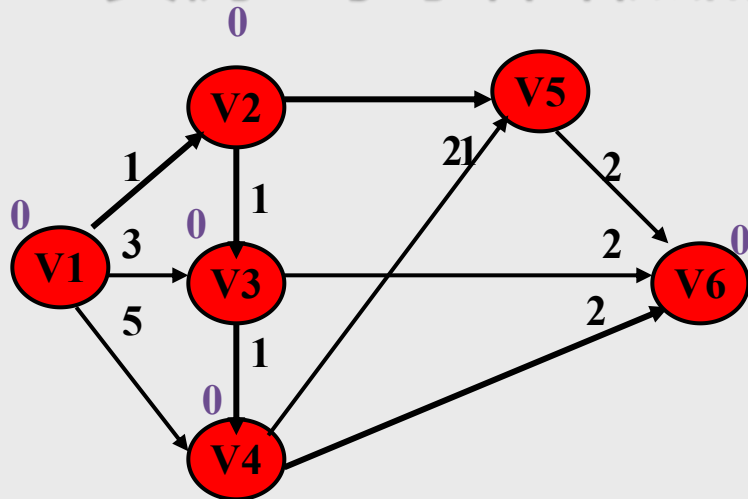


正向拓扑排序：

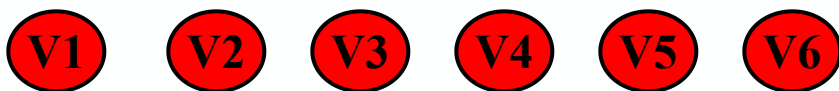


二、关键路径

实例：求事件结点的最早发生时间

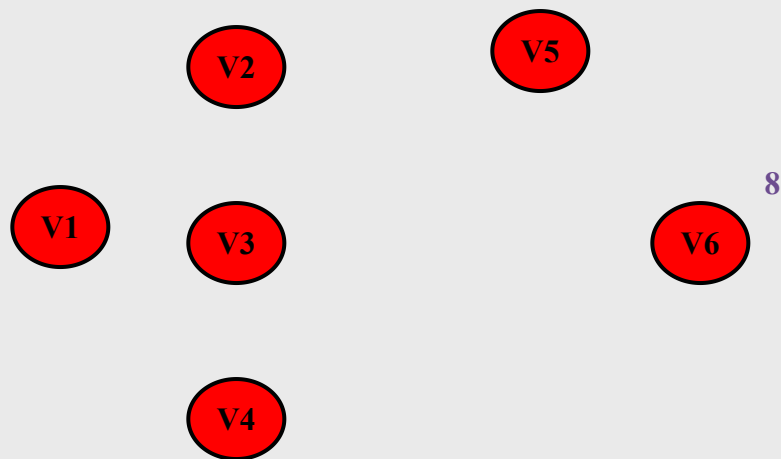
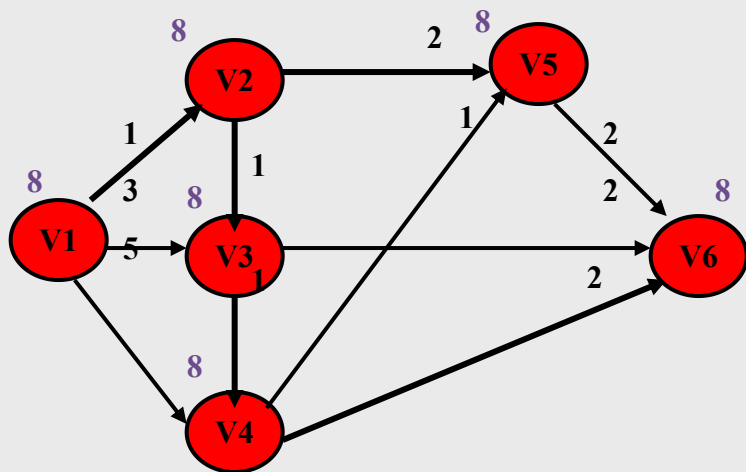


正向拓扑排序：

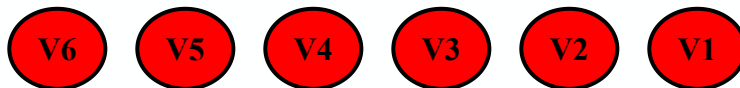


二、关键路径

实例：求事件结点的最迟发生时间

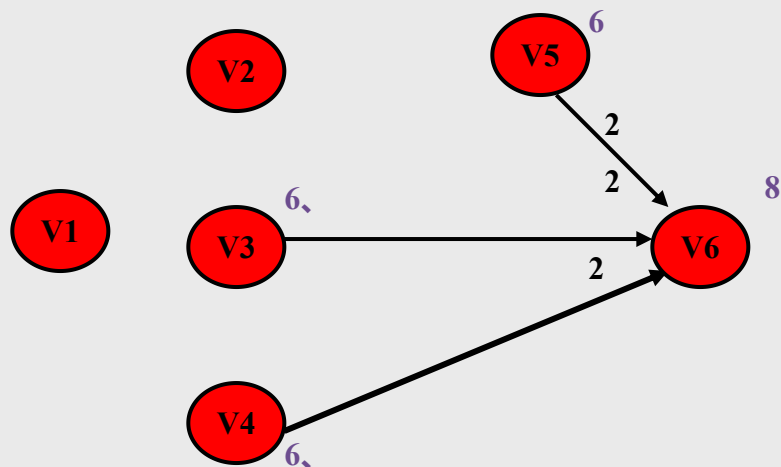
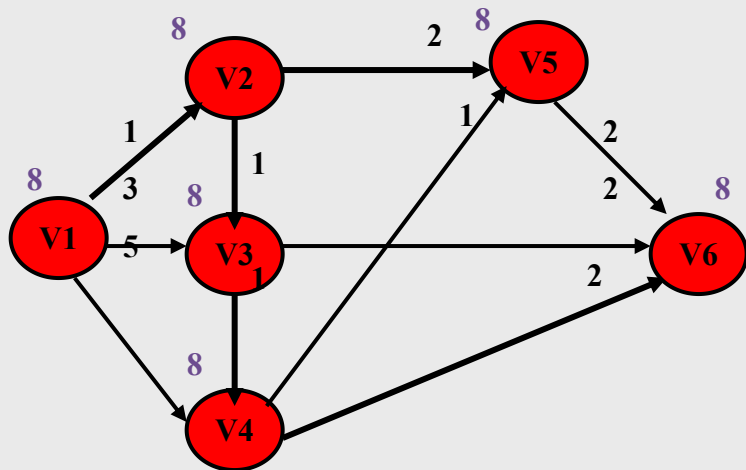


逆向拓扑排序：

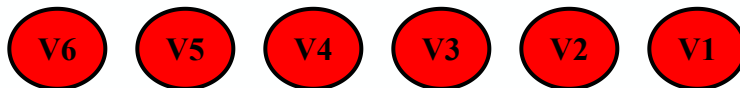


二、关键路径

实例：求事件结点的最迟发生时间

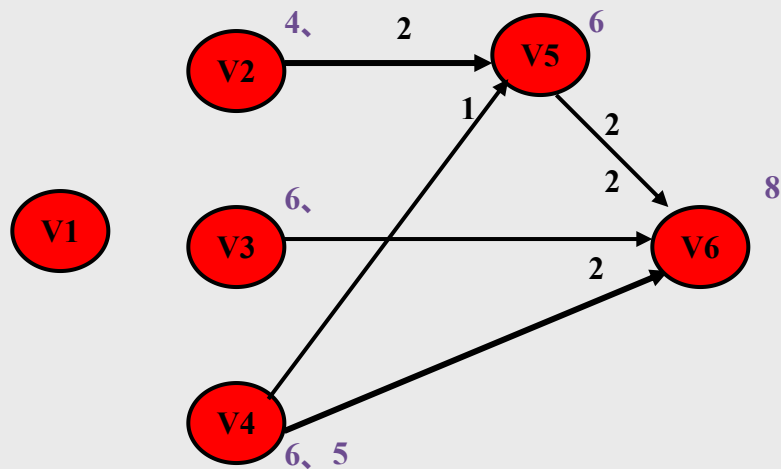
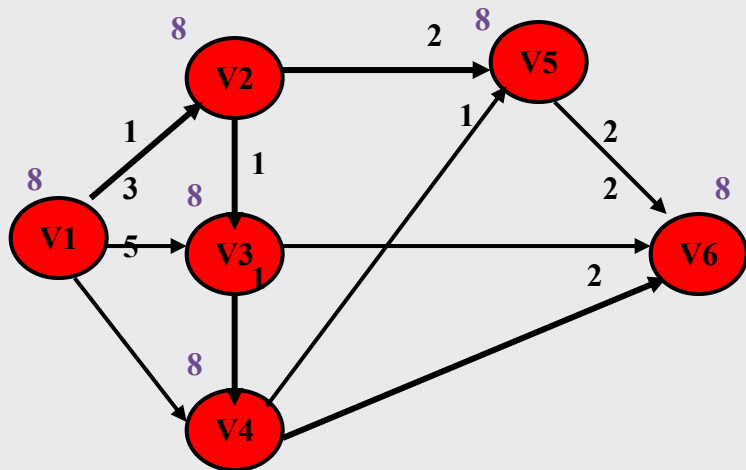


逆向拓扑排序：

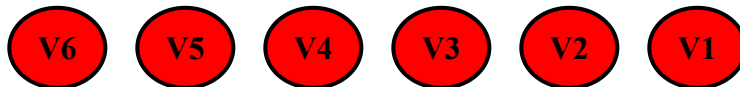


二、关键路径

实例：求事件结点的最迟发生时间

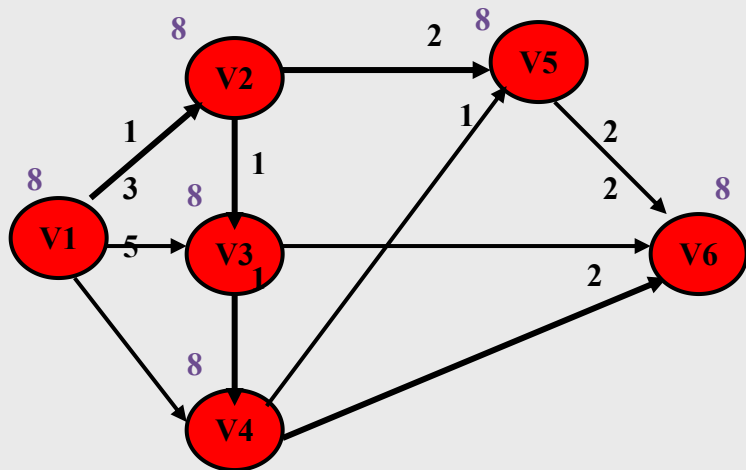


逆向拓扑排序：

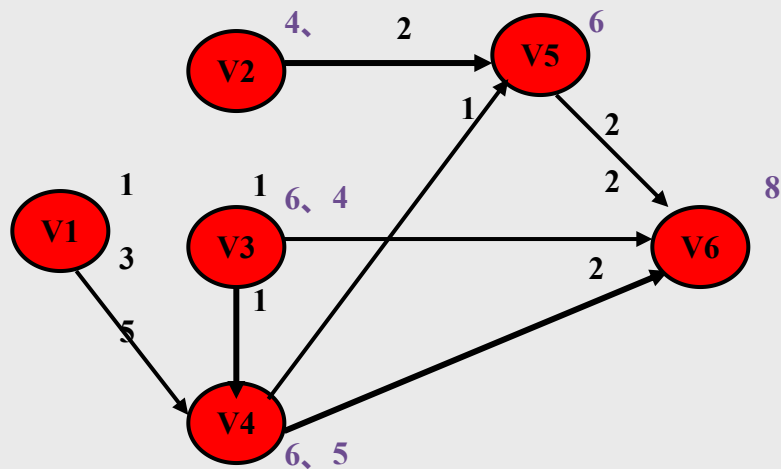


二、关键路径

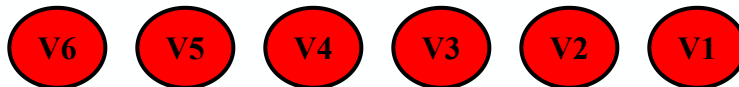
实例：求事件结点的最迟发生时间



0、

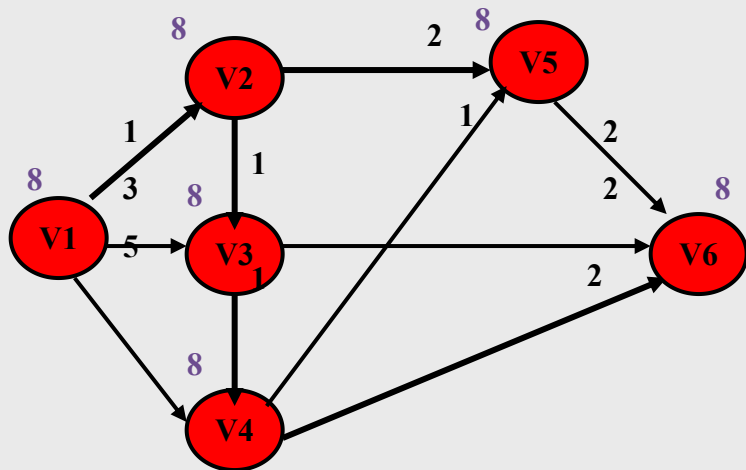


逆向拓扑排序：

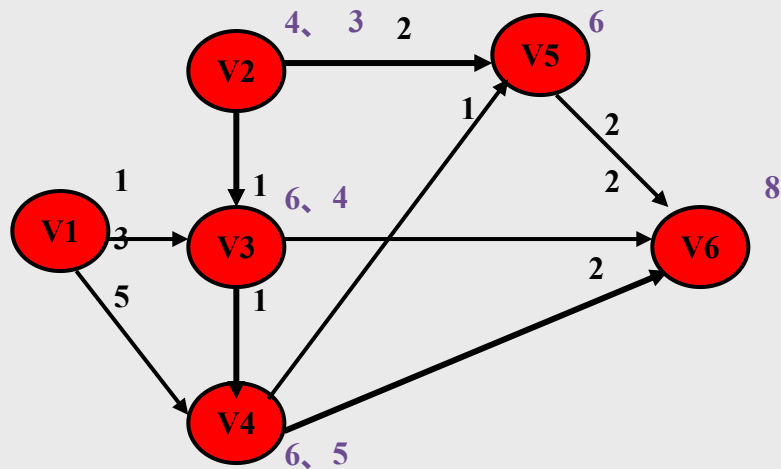


二、关键路径

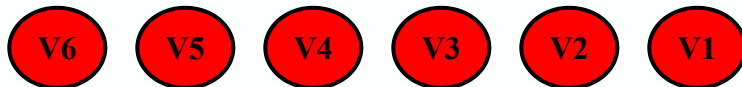
实例：求事件结点的最迟发生时间



0、0、

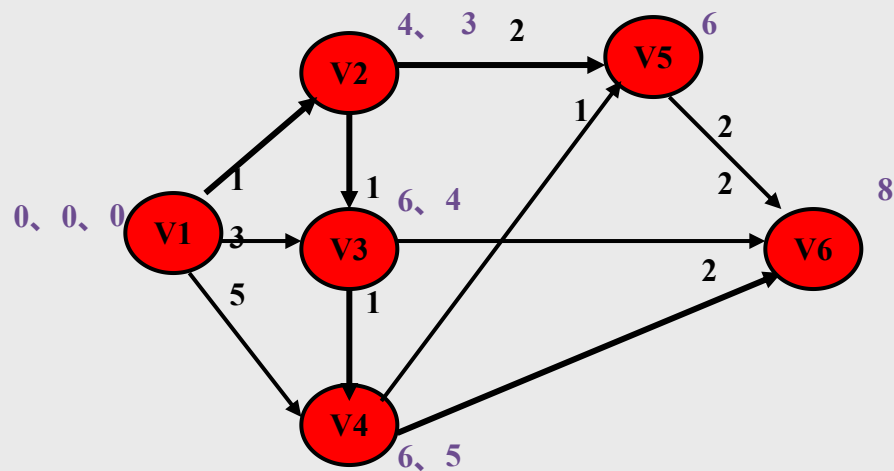
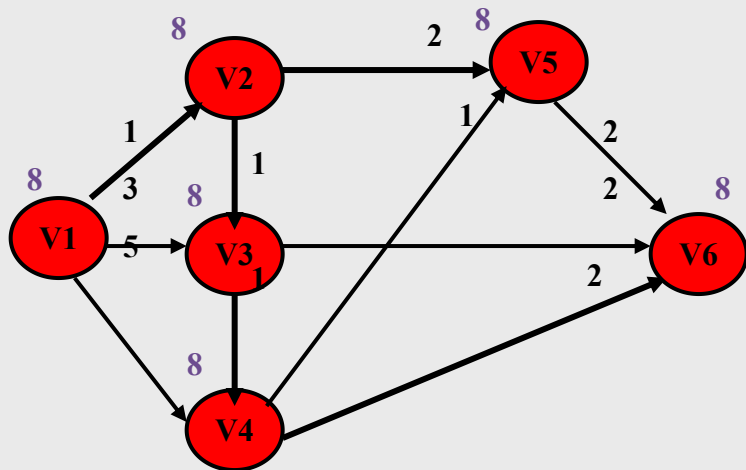


逆向拓扑排序：

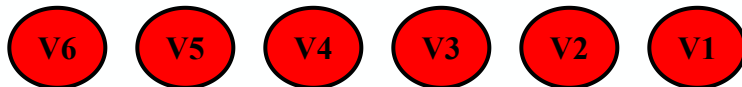


二、关键路径

实例：求事件结点的最迟发生时间



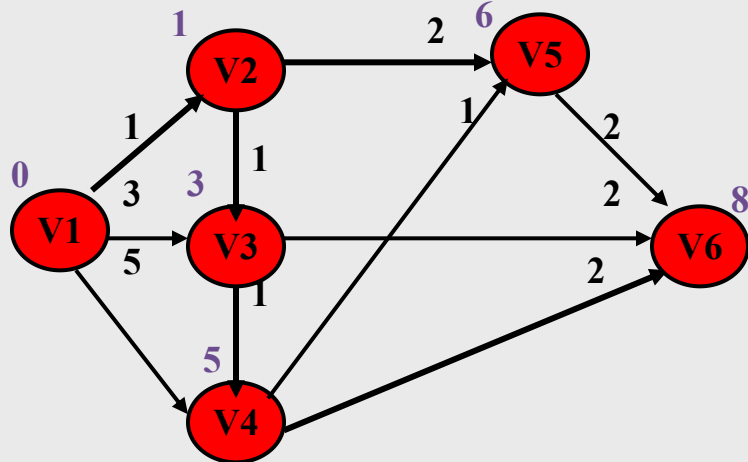
逆向拓扑排序：



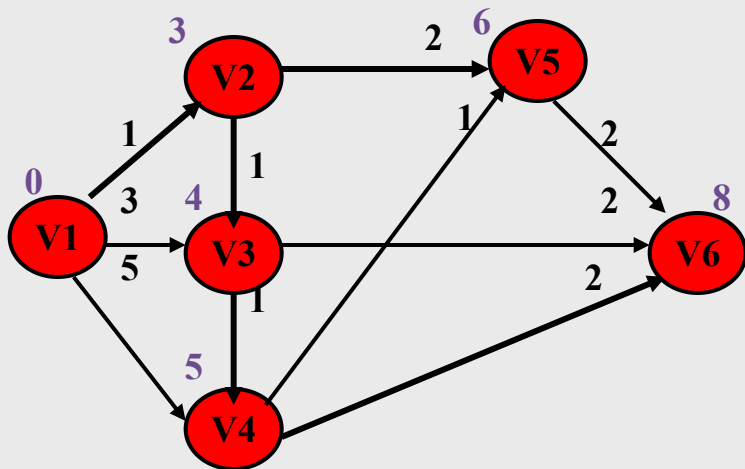
二、关键路径

实例：求事件结点的最迟发生时间

- 实例的事件结点的最早发生时间



- 实例的事件结点的最迟发生时间



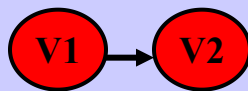
最早发生时间

最迟发生时间

边

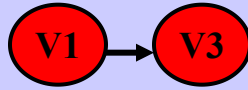
$V_e(j)$

$V_l(k) - \text{dut}(j, k)$



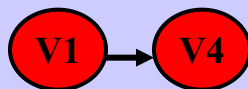
0

2



0

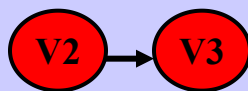
1



0

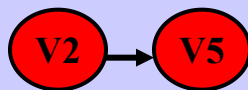
0

关键活动



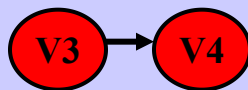
1

3



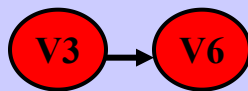
1

4



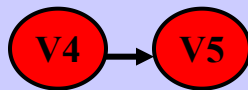
3

4



3

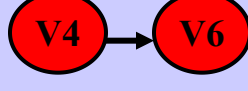
6



5

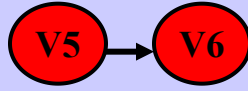
5

关键活动



5

6



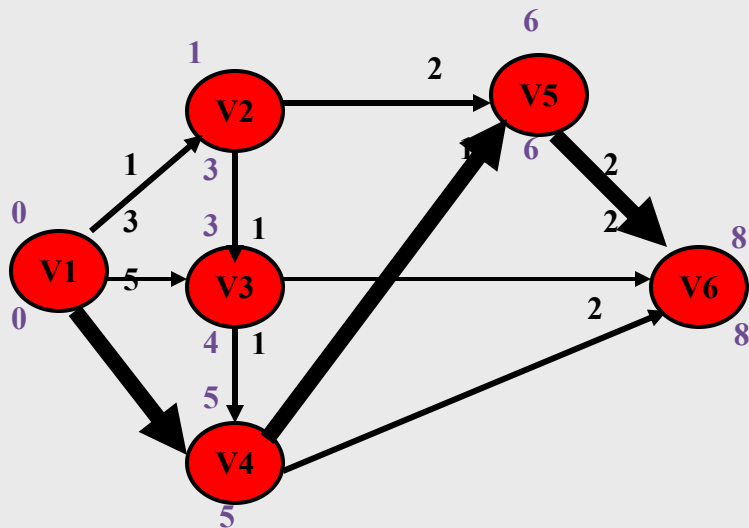
6

6

关键活动

二、关键路径

实例的关键路径（粗大的黑色箭头所示）



注意：关键路径可有多条
缩短工期必须缩短关键活
动所需的时间。