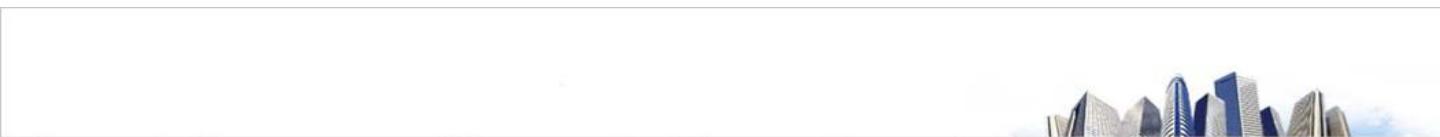




数据结构  
(C语言版) (第2版)  
图  
图的应用 (2)

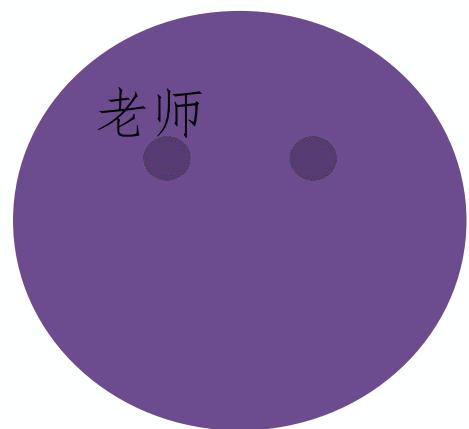
主讲教师：汪红松



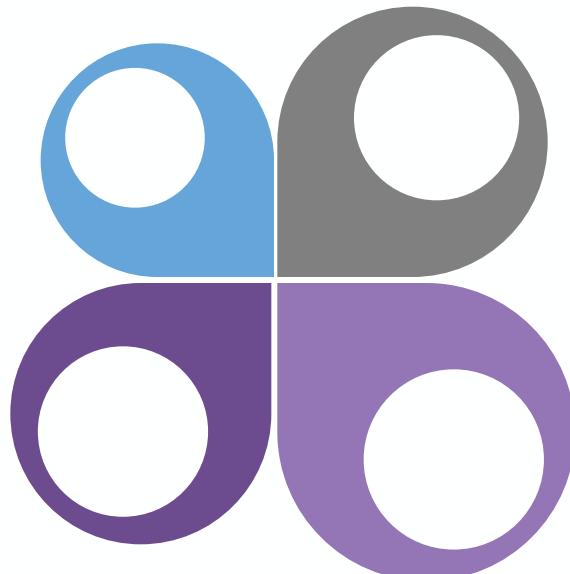
# 教学内容 Contents

- 1 图的定义和基本术语
- 2 图的存储结构
- 3 图的遍历
- 4 图的应用(1)
- 5 图的应用(2)

## **一、拓扑排序 二、关键路径**



▶▶▶ 图的应用



最小生成树



最短路径



拓扑排序



关键路径

# ▶▶▶ 一、拓扑排序

## 1. 有向无环图及其应用

用有向图来描述一个工程或系统的进行过程。

一个工程可以分为若干个子工程，只要完成了这些子工程（活动），就可以导致整个工程的完成。

- ① AOV网(Activity On Vertices) — 用顶点表示活动的网络
- ② AOE网(Activity On Edges) — 用边表示活动的网络

比如教学计划的制定

哪些课程是必须先修的，哪些课程是可以并行学习的。

# ▶▶▶ 一、拓扑排序

## 2. 教学计划的制定

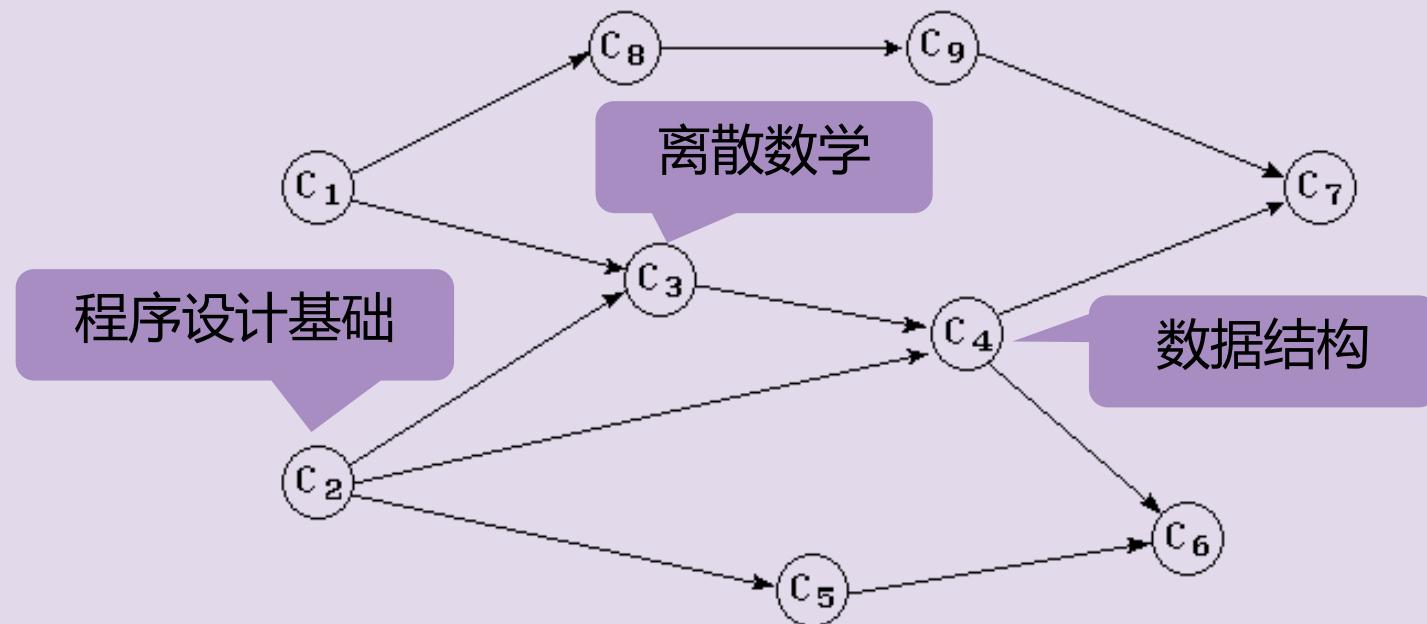
课程代号	课程名称	先修课程
C <sub>1</sub>	高等数学	
C <sub>2</sub>	程序设计基础	
C <sub>3</sub>	离散数学	C <sub>1</sub> , C <sub>2</sub>
C <sub>3</sub>	数据结构	C <sub>3</sub> , C <sub>2</sub>
C <sub>5</sub>	高级语言程序设计	C <sub>2</sub>
C <sub>6</sub>	编译方法	C <sub>5</sub> , C <sub>4</sub>
C <sub>7</sub>	操作系统	C <sub>4</sub> , C <sub>9</sub>
C <sub>8</sub>	普通物理	C <sub>1</sub>
C <sub>9</sub>	计算机原理	C <sub>8</sub>

# ▶▶▶ 一、拓扑排序

## 2. 教学计划的制定

对学生选课工程图进行拓扑排序，得到的拓扑有序序列为

或  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_8, C_9, C_7$   
 $C_1, C_8, C_9, C_2, C_5, C_3, C_4, C_7, C_6$



学生课程学习工程图

# ▶▶▶ 一、拓扑排序

将AOV-网中所有顶点排成一个线性序列，该序列满足：  
若在AOV-网中由顶点 $v_i$ 到顶点 $v_j$ 有一条路径，则在该线性序列中的顶点 $v_i$ 必定在顶点 $v_j$ 之前。

- ✓ 用在AOV-网中，不应该出现有向环。因为某项活动不可能以自己为先决条件。
- ✓ 对给定的AOV-网判定其中是否存在环的检测办法是对有向图的顶点进行拓扑排序。

# ▶▶▶ 一、拓扑排序

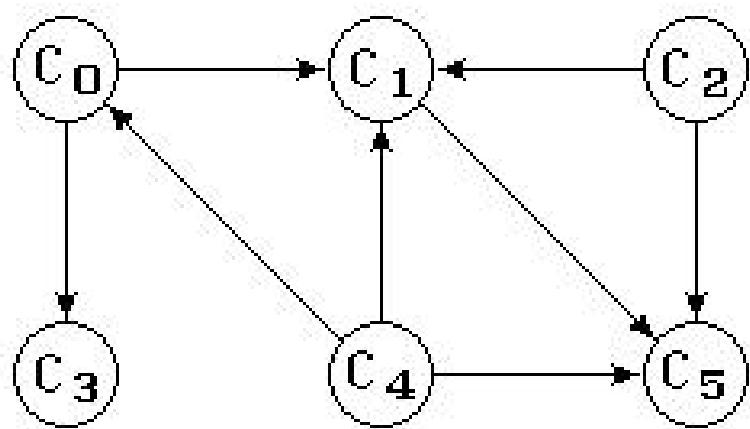
## 3. 拓扑排序算法的思想 - 重复选择没有直接前驱的顶点

- (1) 输入AOV网络。令  $n$  为顶点个数；
- (2) 在AOV网络中选一个没有直接前驱的顶点, 并输出之;
- (3) 从图中删去该顶点, 同时删去所有它发出的有向边;
- (4) 重复以上 2、3 步, 直到：

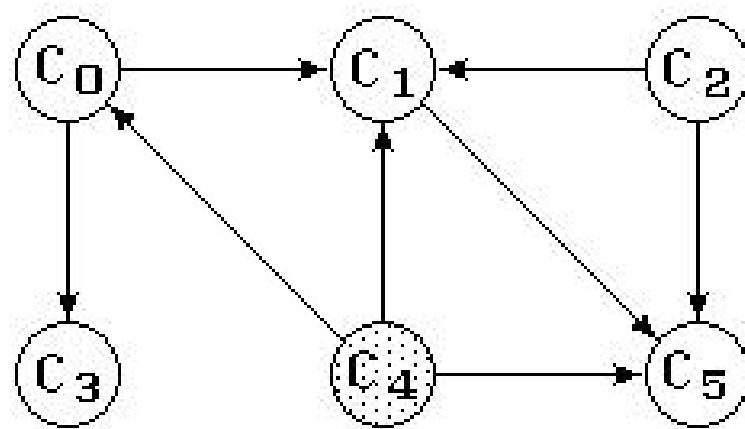
- ✓ 全部顶点均已输出, 拓扑有序序列形成, 拓扑排序完成；
- ✓ 图中还有未输出的顶点, 但已跳出处理循环。这说明图中还剩下一些顶点, 它们都有直接前驱, 再也找不到没有前驱的顶点了。这时AOV网络中必定存在有向环。

# 一、拓扑排序

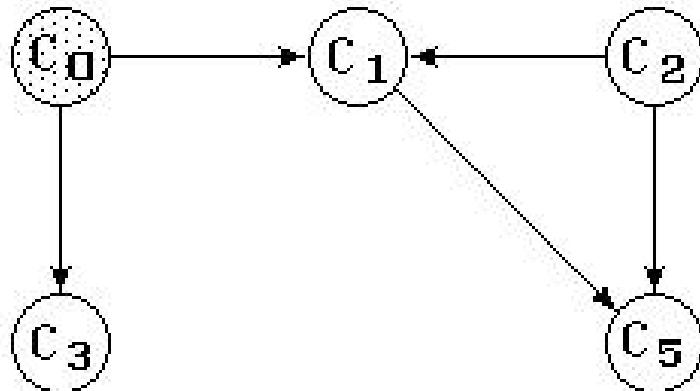
## 4. 拓扑排序的过程



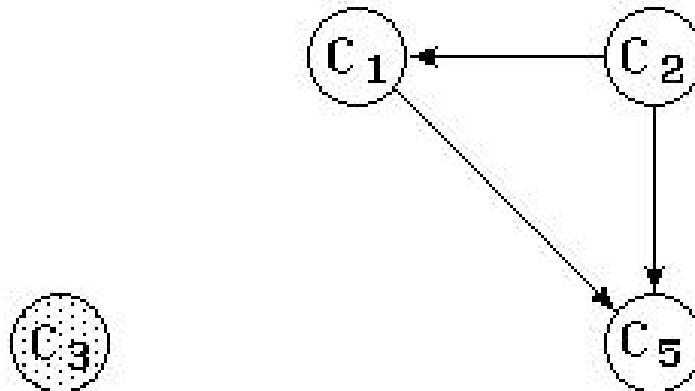
(a) 有向无环图



(b) 输出顶点 C<sub>4</sub>



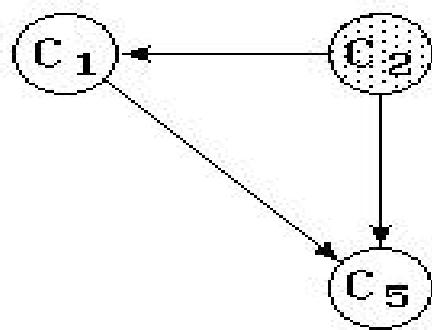
(c) 输出顶点 C<sub>0</sub>



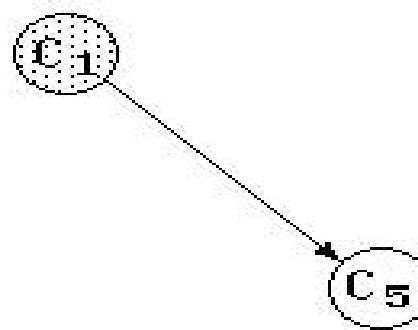
(d) 输出顶点 C<sub>3</sub>

# 一、拓扑排序

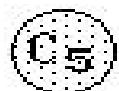
## 4. 拓扑排序的过程



(e) 输出顶点  $C_2$



(f) 输出顶点  $C_1$



(g) 输出顶点  $C_5$

(h) 拓扑排序完成

→拓扑序列  $C_4, C_0, C_3, C_2, C_1, C_5$ 。满足图中给出的所有前驱和后继关系，对于本来没有这种关系的顶点，如  $C_4$  和  $C_2$ ，也排出了先后次序关系。

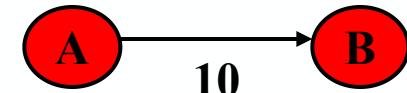
## 二、关键路径

### 1. 用途：估算工程项目完成时间

AOE网络：定义结点为事件，有向边的指向表示事件的执行次序。单位是时间（时刻）。有向边定义为活动，它的权值定义为活动进行所需要的时间。

### 2. 术语

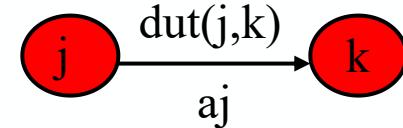
- 源点：表示整个工程的开始点，也称起点。
- 收点：表示整个工程的结束点，也称汇点。
- 事件结点：单位时间，表示的是时刻。
- 活动（有向边）：它的权值定义为活动进行所需要的时间。方向表示起始结点事件先发生，而终止结点事件才能发生。
- 事件的最早发生时间（ $Ve(j)$ ）：从起点到本结点的最长的路径。意味着事件最早能够发生的时刻。
- 事件的最迟发生时间（ $Vi(j)$ ）：不影响工程的如期完工，本结点事件必须发发生的时刻。



## 二、关键路径

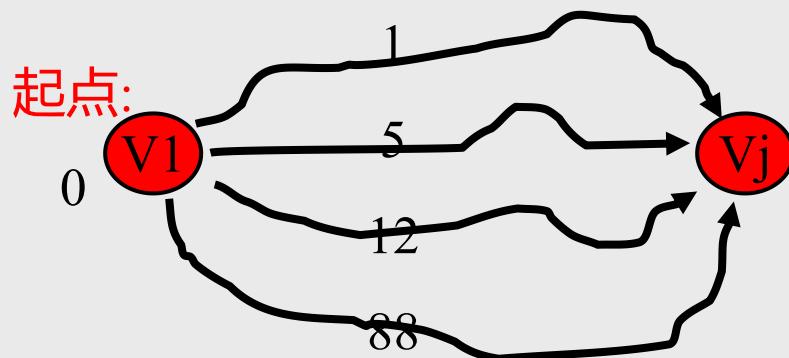
活动的最早开始时间 :  $e(a_i) = V_e(j)$

活动的最迟开始时间 :  $l(a_i) = V_l(k) - dut(i, k)$

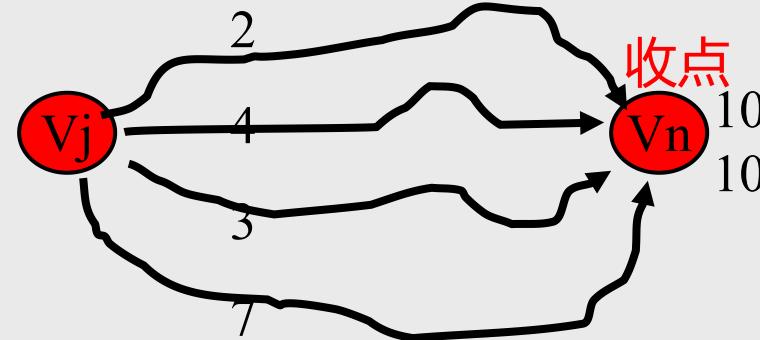


关键活动 : 最早开始时间 = 最迟开始时间的活动

关键路径 : 从源点到收点的最长的一条路径 , 或者全部由关键活动构成的路径。



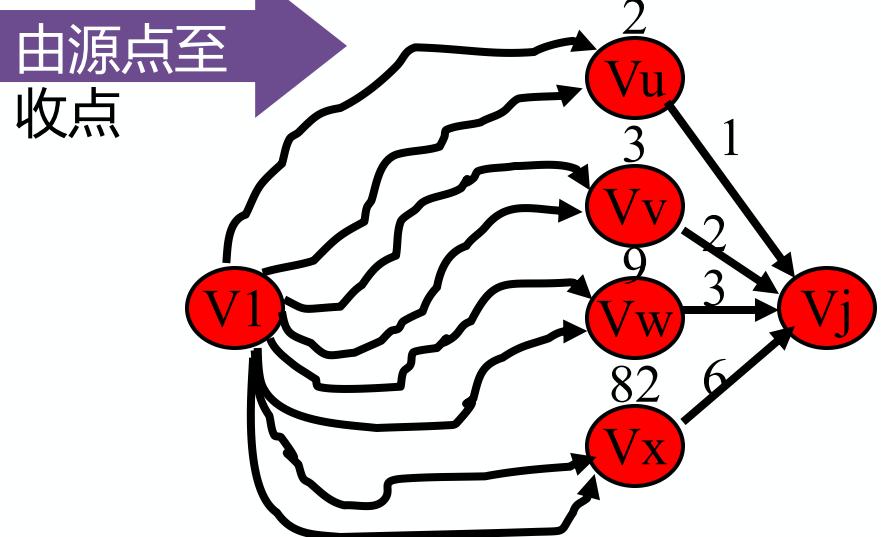
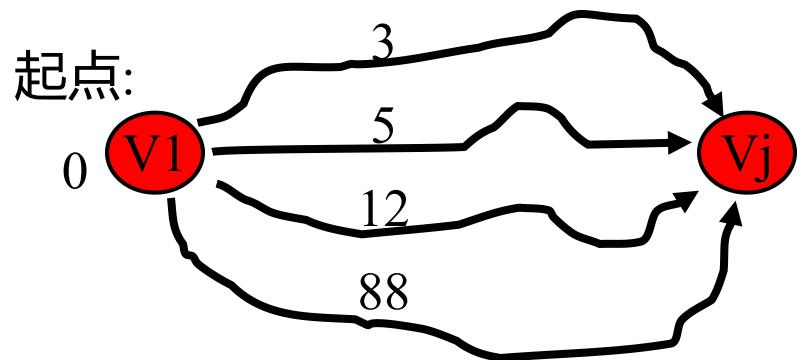
$V_e(V_j) = 88$  取 1、5、12、88 的最大值 88



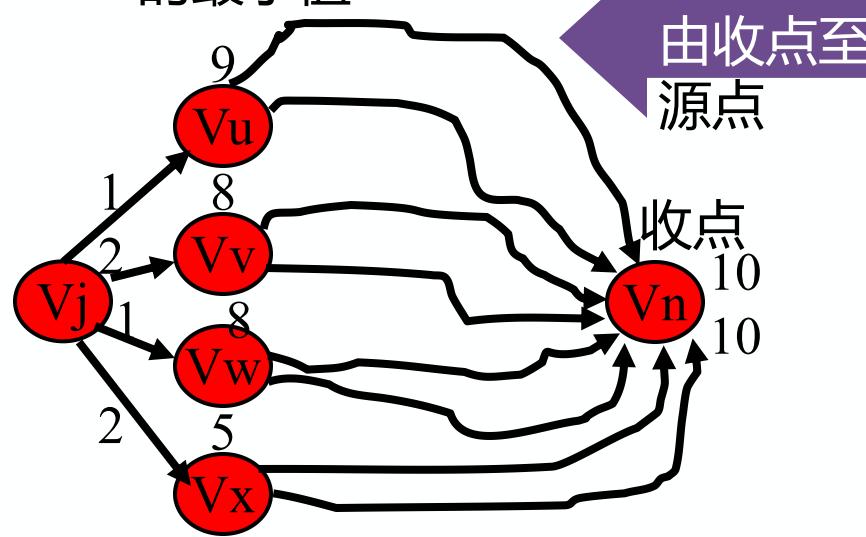
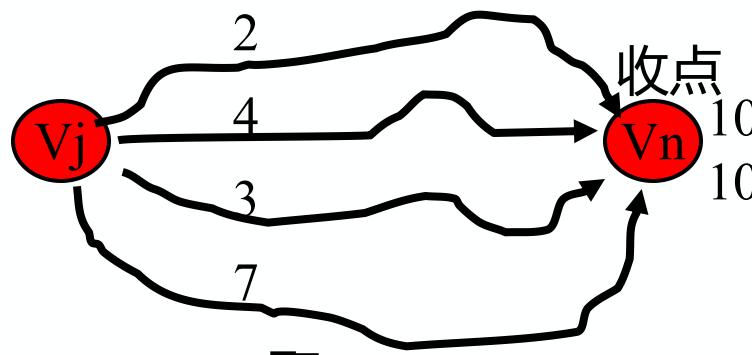
$V_l(V_j) =$  取 10-2、10-4、10-3、10-7 的最小值 3; 或 10 - 最长路径 7

## 二、关键路径

### $Ve(j)$ 及 $Vi(j)$ 的求法



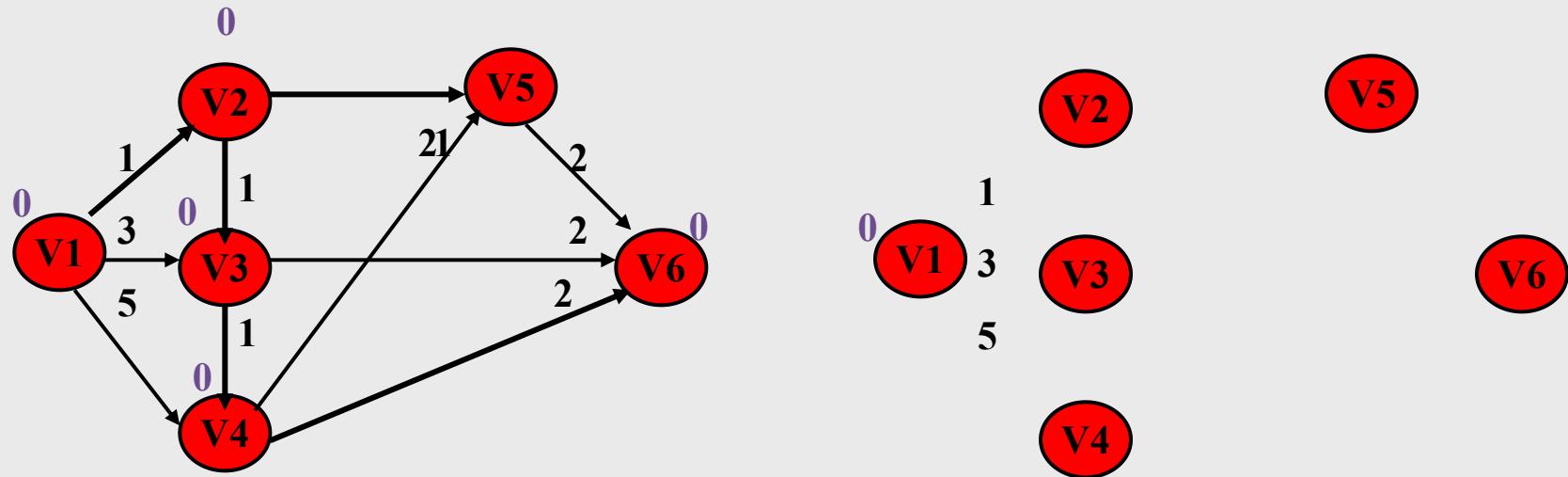
$Ve(Vj) = Vj$  的起始结点的最早发生时间 + 各自的边的权值中的和的最大值 88



$Vi(Vj) = 取 终止结点的最迟发生时间 - 各自的边的权值的差的最小值 3$

## 二、关键路径

实例：求事件结点的最早发生时间

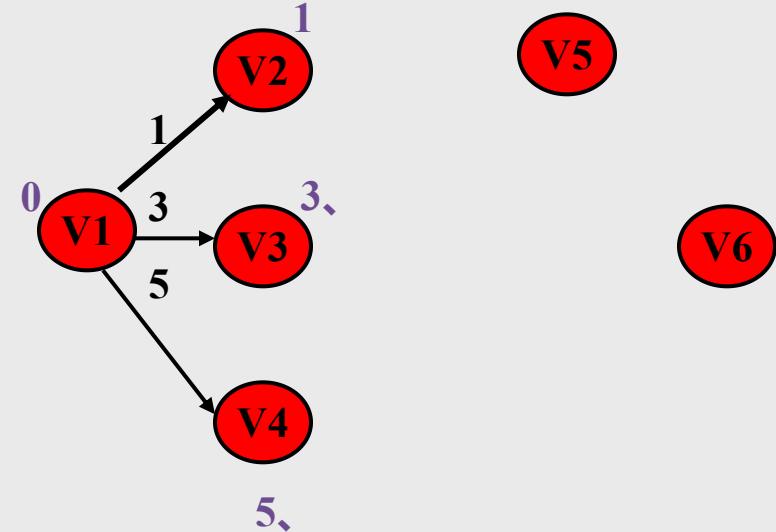
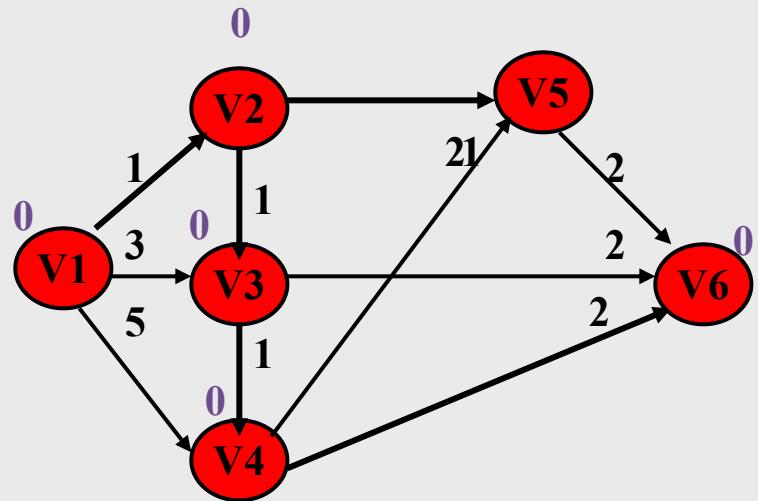


正向拓扑排序：



## 二、关键路径

实例：求事件结点的最早发生时间

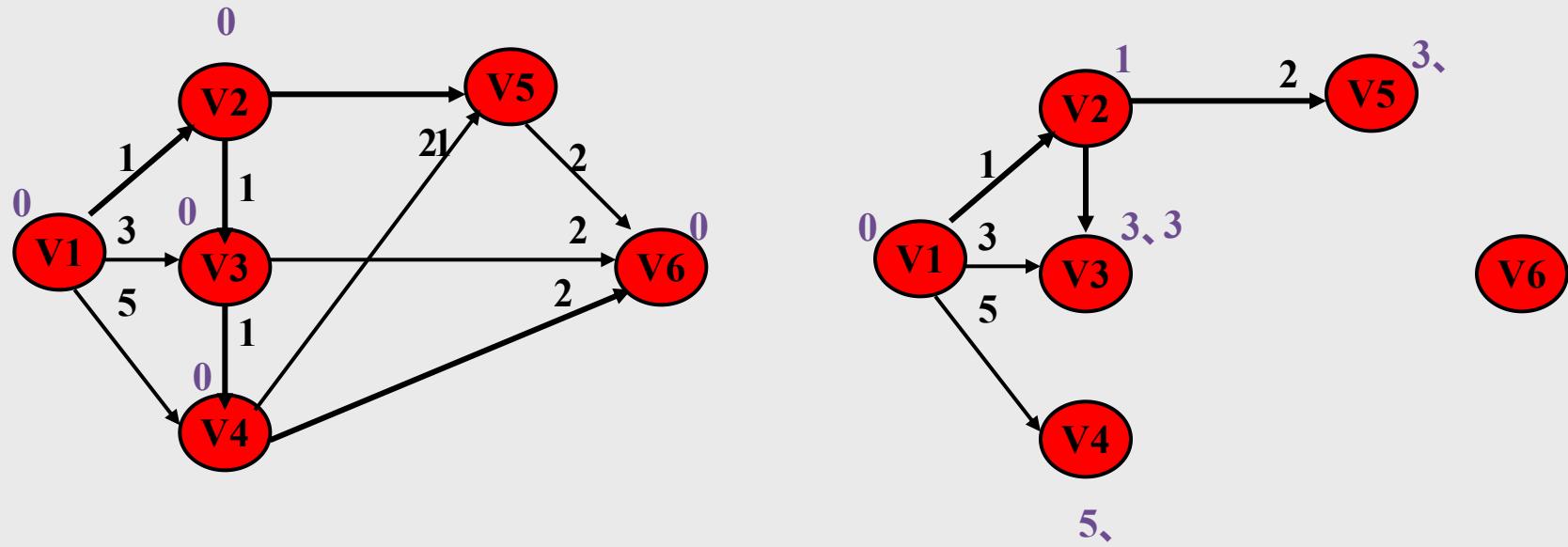


正向拓扑排序：



## 二、关键路径

实例：求事件结点的最早发生时间

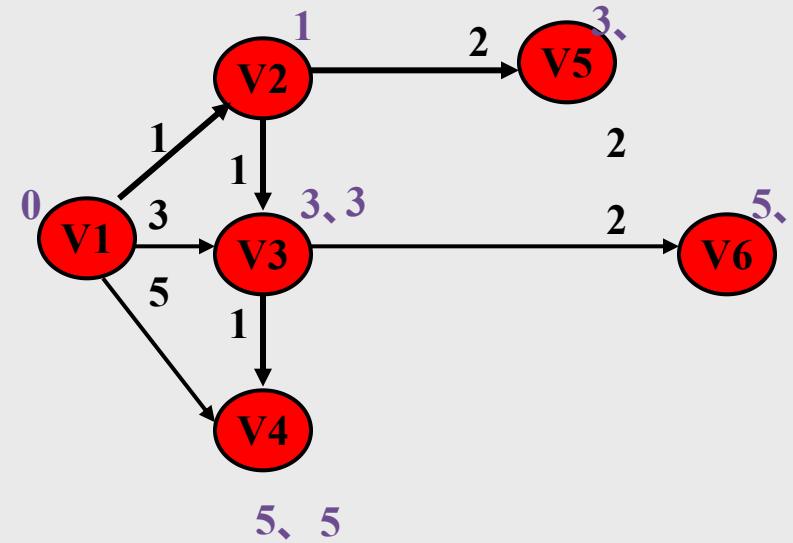
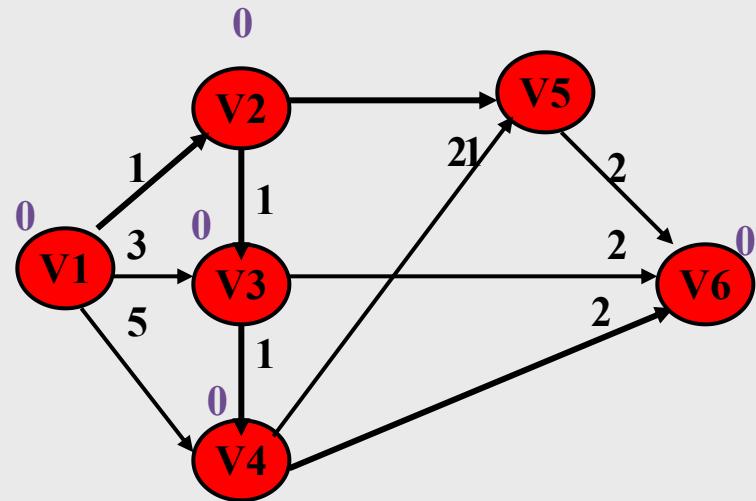


正向拓扑排序：



## 二、关键路径

实例：求事件结点的最早发生时间

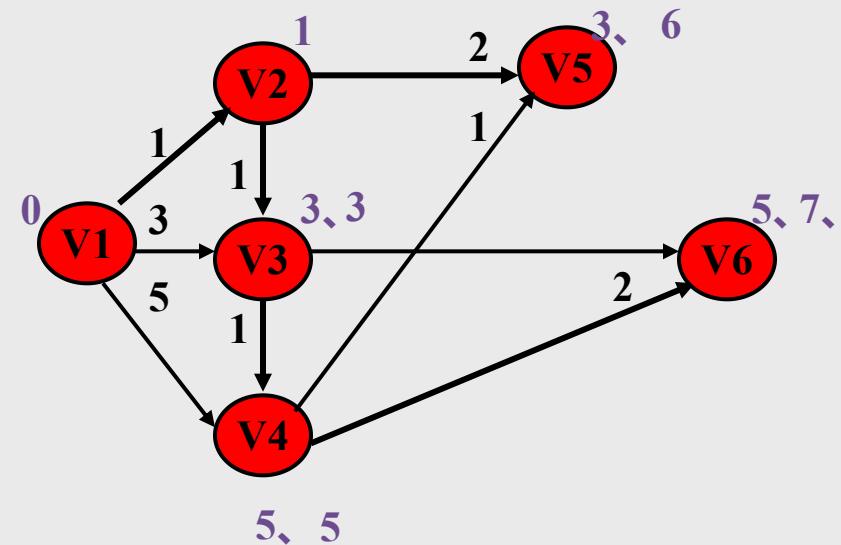
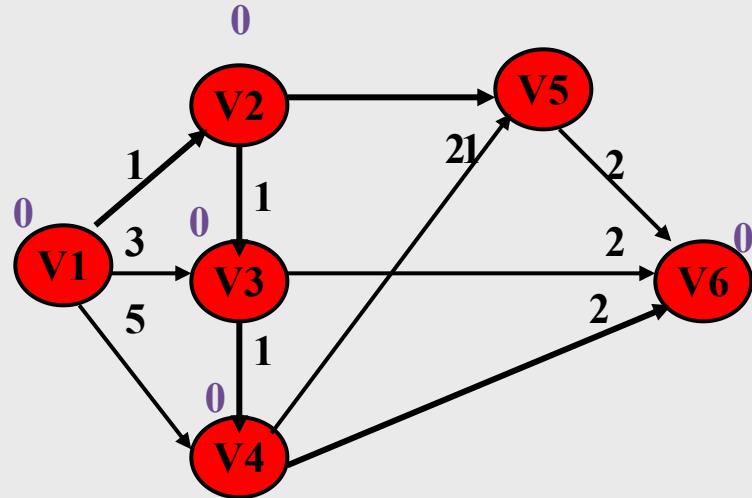


正向拓扑排序：



## 二、关键路径

实例：求事件结点的最早发生时间

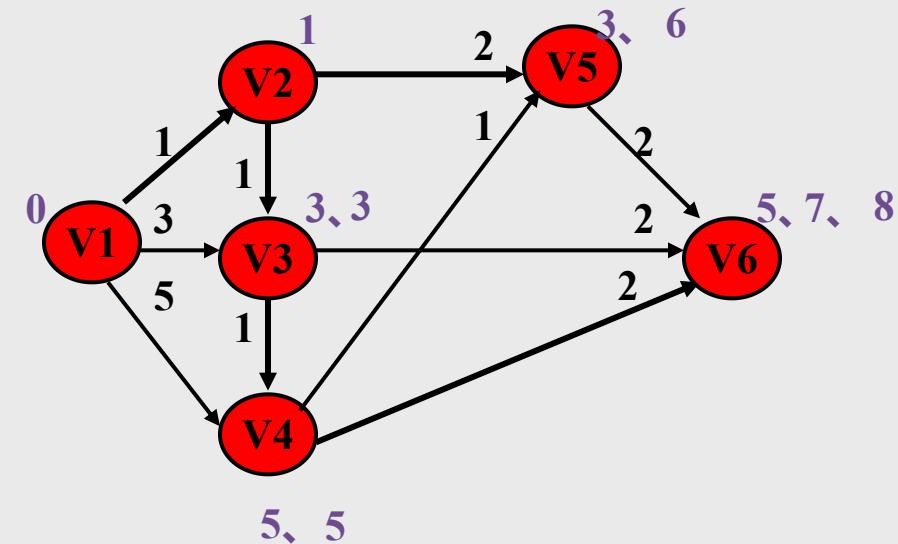
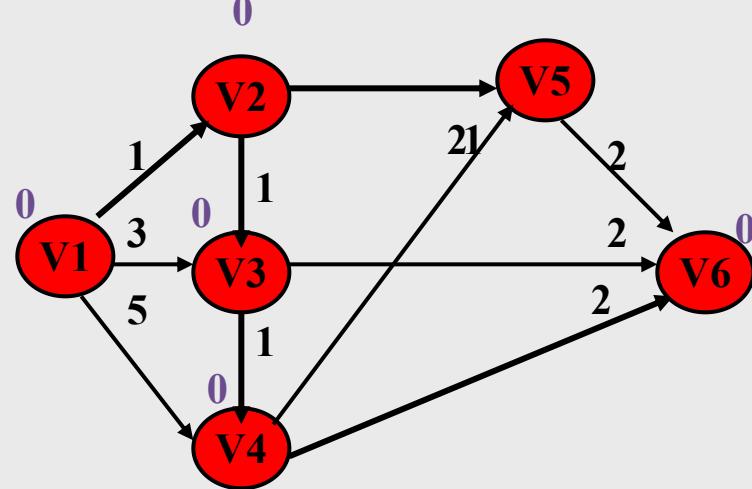


正向拓扑排序：



## 二、关键路径

实例：求事件结点的最早发生时间

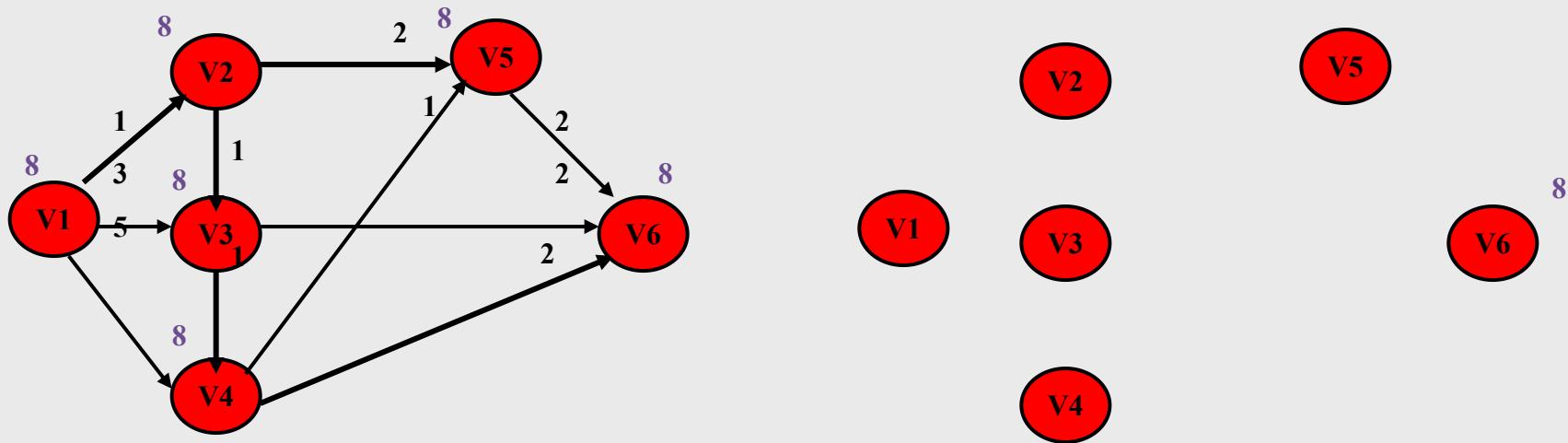


正向拓扑排序：



## 二、关键路径

实例：求事件结点的最迟发生时间

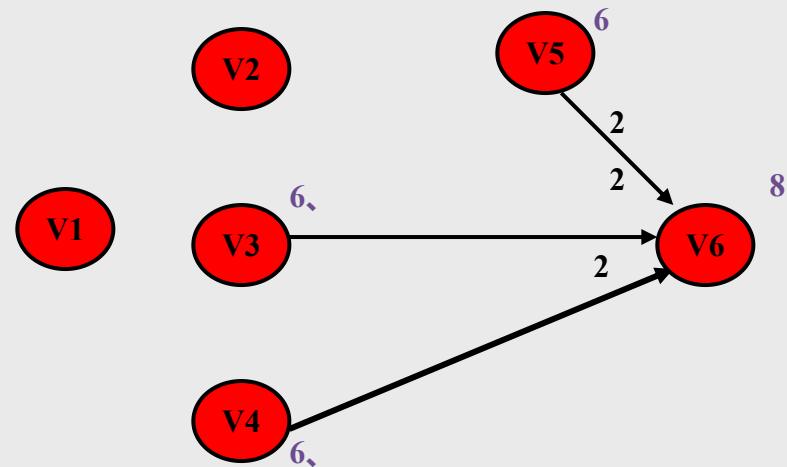
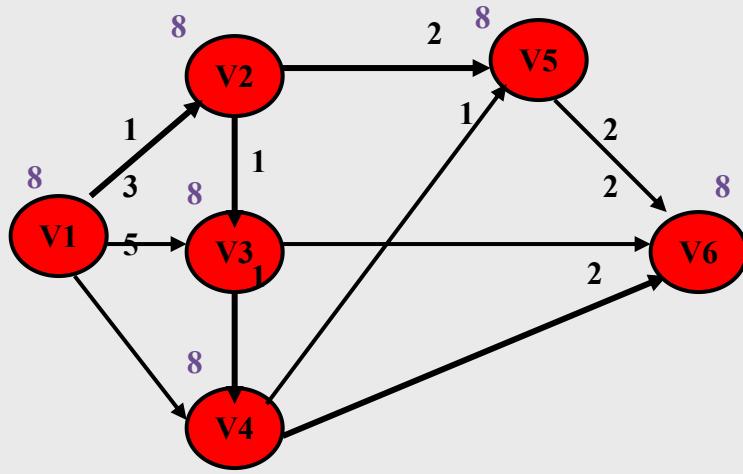


逆向拓扑排序：



## 二、关键路径

实例：求事件结点的最迟发生时间

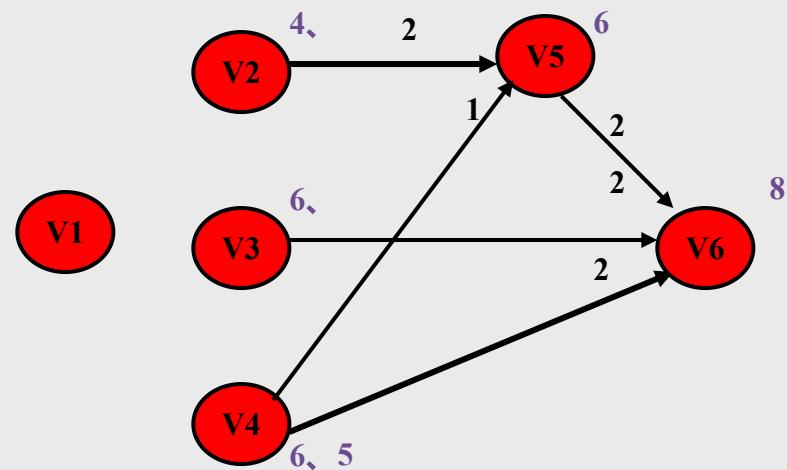
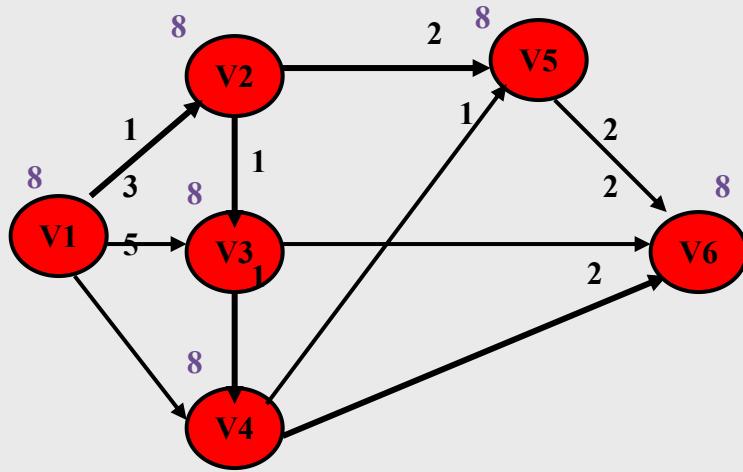


逆向拓扑排序：



## 二、关键路径

实例：求事件结点的最迟发生时间

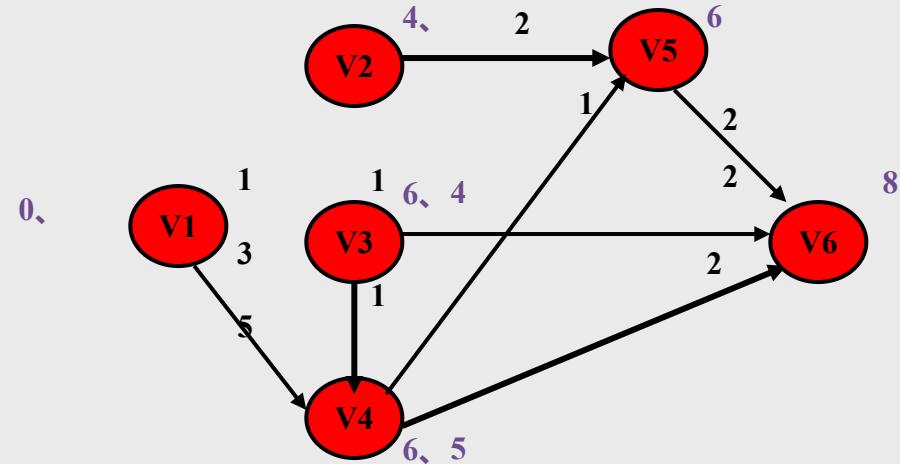
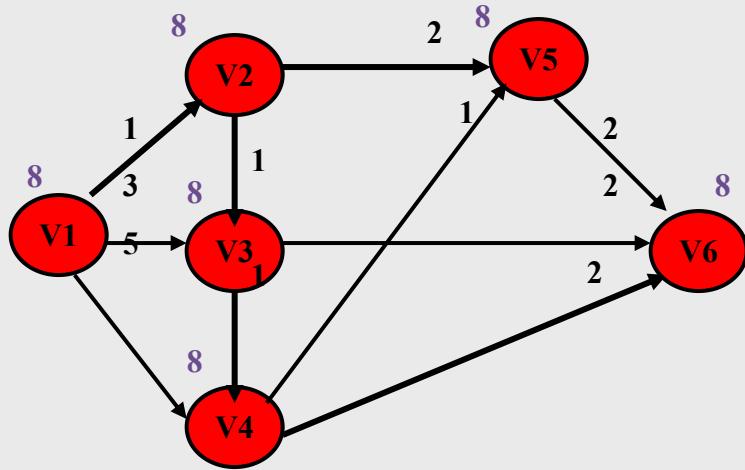


逆向拓扑排序：



## 二、关键路径

实例：求事件结点的最迟发生时间

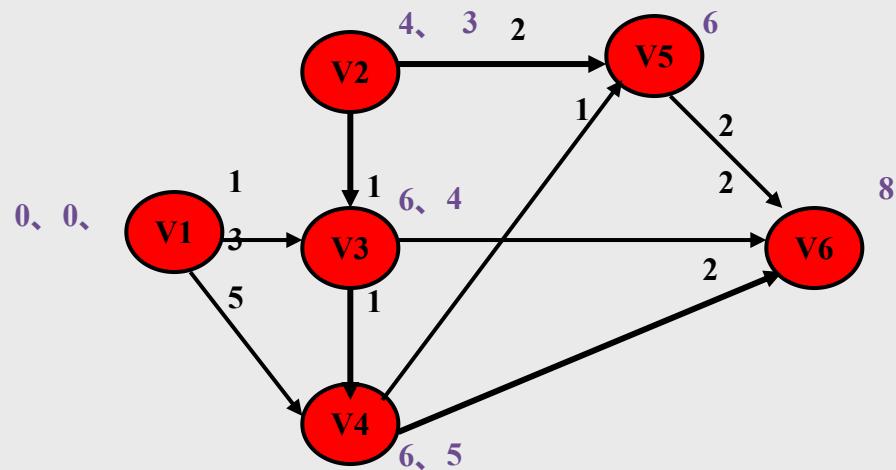
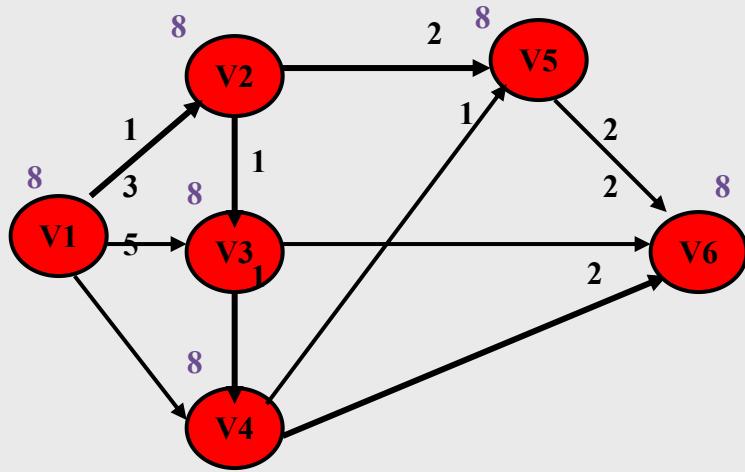


逆向拓扑排序：



## 二、关键路径

实例：求事件结点的最迟发生时间

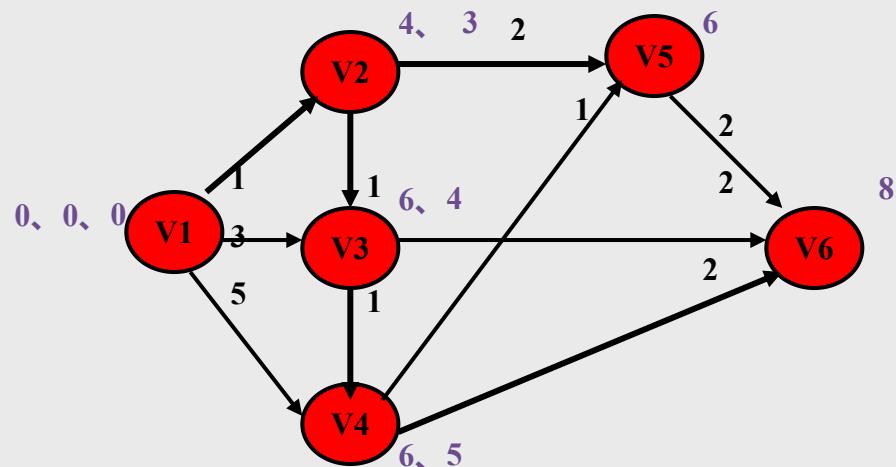
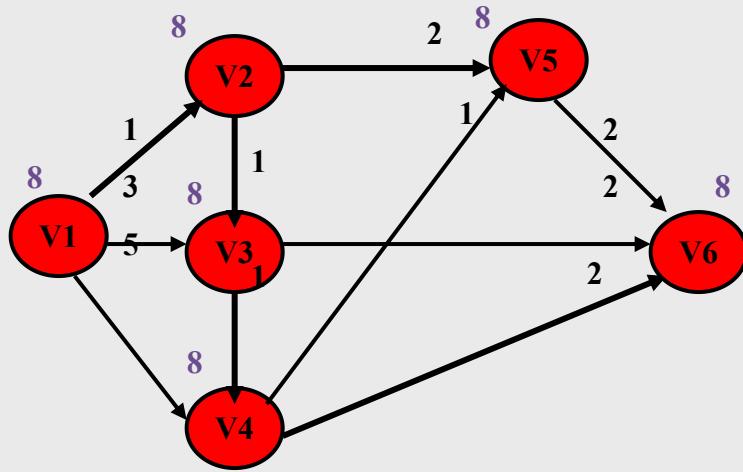


逆向拓扑排序：



## 二、关键路径

实例：求事件结点的最迟发生时间



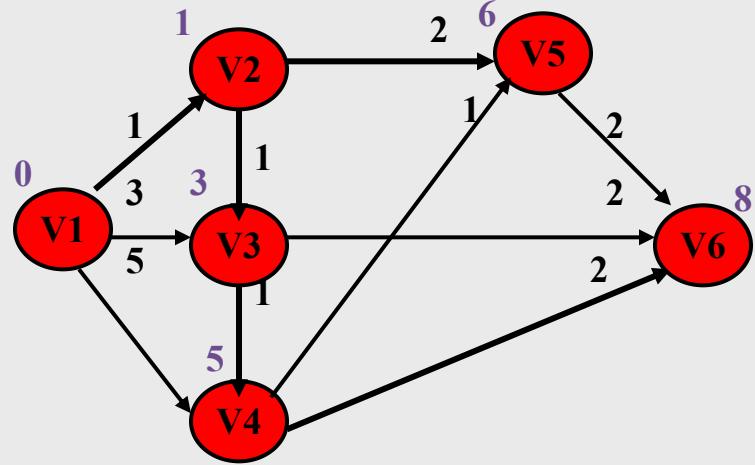
逆向拓扑排序：



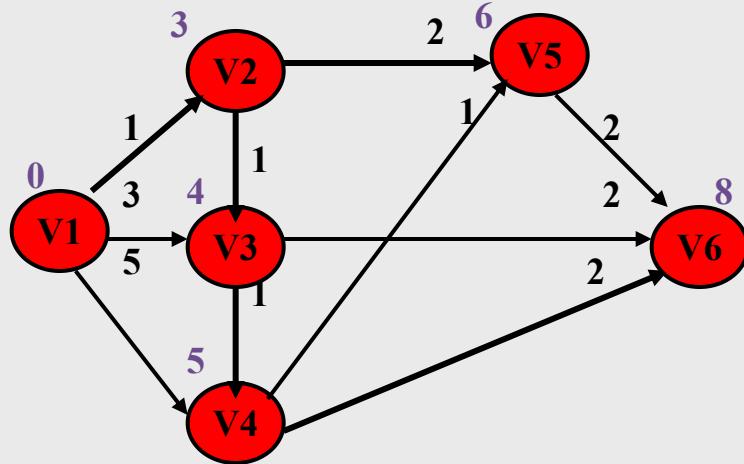
## 二、关键路径

实例：求事件结点的最迟发生时间

- 实例的事件结点的最早发生时间



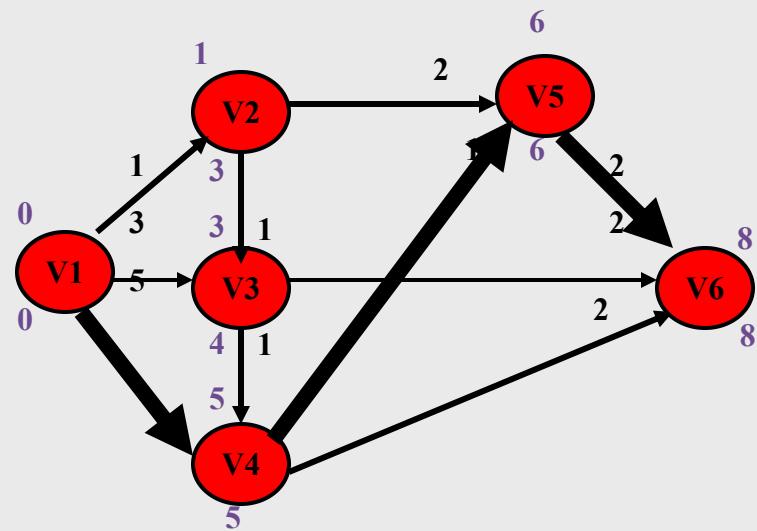
- 实例的事件结点的最迟发生时间



边	$V_e(j)$	$V_l(k) - d_{ut}(j, k)$	
$V1 \rightarrow V2$	0	2	
$V1 \rightarrow V3$	0	1	
$V1 \rightarrow V4$	0	0	关键活动
$V2 \rightarrow V3$	1	3	
$V2 \rightarrow V5$	1	4	
$V3 \rightarrow V4$	3	4	
$V3 \rightarrow V6$	3	6	
$V4 \rightarrow V5$	5	5	关键活动
$V4 \rightarrow V6$	5	6	
$V5 \rightarrow V6$	6	6	关键活动

## 二、关键路径

实例的关键路径（粗大的黑色箭头所示）



注意：关键路径可有多条  
缩短工期必须缩短关键活  
动所需的时间。